吉田善章

〈渦〉をめぐる数学的問題

February 18, 2012

Preface

〈渦〉は，物理に限らず様々な科学の領域で，複雑な現象や不思議な効果を表象する キーワードである．数学的にいうと,〈渦〉とは “curl” によって計られる場の歪みの基本量であって，これを一般次元に拡張すると，1 次微分形式の外微分として表わされるもの全てである．さらに広く展望すると，外微分と内部積を組み合わせた Lie 微分やシンプレクティック 2 次形式に対応する Poisson 括弧積なども〈渦〉を表現する数学的形式といってよい．流速ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V}$，電磁場のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ に対して磁場 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, 4 次元ポテンシャル A^μ に対して Faraday テンソル $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$，オブザーバブル X に対して $\{H, X\} := \mathscr{J}^{jk}(\partial_j H)(\partial_k X)$ （$\mathscr{J}^{jk}$: Poisson 行列，H: Hamiltonian）など，物理のあらゆる領域に〈渦〉が現れる．まさに万物は「流転」するのだ．

この講義[1]では，渦に関わるさまざまな数学的概念を整理し，渦の数学的特徴づけについて論考する．

2012 年 1 月 吉田善章

[1] 九州大学・大学院数理学研究院　集中講義（2012 年 1 月 23 日〜27 日）．

Contents

Chapter 1
〈渦〉とはなにか

〈渦〉は「現象」と「もの」の間を揺れ動く不確定な概念である．たとえば水の流れに現れる渦は，流れという現象のうちに生起する文様なのだが，それはたとえ不安定で移ろいやすくとも，ある〈自己同一性 = identity〉を保とうとする．それゆえに，ある（不確実な）外延と形態を有する「渦というもの」を私たちは名指すことができるのだ．

〈渦〉という言葉が喚起する一般的なイメージには，したがって，移ろいやすさ，生成・消滅，変動，変形，といった「動的なもの＝ダイナミズム」が含まれる．また，巻き込み，かき混ぜ（ミキシング），揺り動かし，さらには幻惑といった「作用」の概念を引き寄せる.〈渦〉が文学や美術によく現れるのは—また日常言語でも「渦巻く … 」とか「渦中の … 」とかのように頻繁に用いられるのは— こうした「動き」「作用」のイメージに，不思議さのニュアンスが色を添えるからであろう．その不思議さの一端を数理の課題に定式化することが，この講義の目的である．

〈渦〉をめぐる以上の短いコメントについて，その背景にある概念をもう少し丁寧に説明し，この講義の主題を定めてゆこう．

1.1 渦という表象

1.1.1 自己同一性 *(identity)* と表象 *(representation)*

私たち（とくに「理科系」と呼ばれる技能者たち）は，ある注目する「もの」について，その〈自己同一性 = identity〉はあらかじめ定まったものだとして議論を始めることが多い．たとえば，アリストテレスの論理学において「$A > B$ かつ $A < B$ であることはない」というとき，まず「A は A として自己同一性が定まった項」でなくてはならない．しかし，ベルグソン（Henri-Louis Bergson; 1859–1941 ）は，A は「現在」において同一性が定まる項ではありえないことを指弾する．現在における A のありようは，同時に過去と共存し重層化している，そのために「現在の A」は自己自身として存在するのではなく，A の断片

がある時間的切断面に顕在化したものと考える．こうして，A と他項との差異が，それぞれの時間断面に現れると考えると，A とは〈差異化の作用〉に他ならず，その差異を〈生成〉する運動性こそが本質であるということになる．[1]

この興味深い批判を心に留めつつ，物理の理論がどのように語られるのかを再検討してみよう．たとえば「惑星」の軌道を記述するとき，まず最初に惑星を「質点」という抽象概念に置き換える．質点とは，ある定まった質量をもち，時空間の中に一つの位置を占める数学的な「点」である：このように identity が定まった「もの」である．現実世界にある存在を思弁的に（数学的に）操作できる概念に置き換えることを〈還元 = reduction〉という．惑星の運動という物理の問題を考えるとき，私たちは惑星を〈表象 = representation〉する道具として質点という数学的概念を措定するのである．

しかし，惑星を質点という表象へ還元することが「成功する」のは，その軌道を議論する限りにおいてである．惑星そのものは，もちろん筆舌に尽くしがたい複雑系であって，それに関して様々な〈主題 = subject〉を立てて議論することができる．私たちは，惑星軌道の理論（正確にいえば質点軌道の理論）を客観性の極みとみなすのだが，実はその言説の前提に「主題の選択」という主観が介在しているのである．

現実世界の存在と，その物理学における表象（ここでは〈モデル〉と言い換えてもいいだろう）の間には常に隔たりがある．そして，その「すきま」こそ面白い．還元によって捨象された「すきま」には，新しい発見が生まれる可能性が満ちているのだ．ガリレオが示した物体の落下の法則，すなわち『質量に依存せず全てのものは，空気との相互作用がない限り，同じように落下する』は，質点に還元された物体の関する法則であって，現実世界にある物体は，有限な大きさをもつために空気と相互作用し，そのために（アリストテレスが述べたように）軽い方がゆっくり（複雑に）落下する．質点の落下モデルが捨象した「物体と空気との相互作用」は，流体力学では重要な主題として立ち現れる．あるいはミクロの世界へ展望を拓くと，電子という物体の運動を記述するためには，大きさをもたない質点というモデルは妥当せず，不確定性原理を満たすような数学的表象として波動関数を措定することになる．そこに量子論の主題が現れる．

さて，物理が考える〈渦〉とは，どのような事象（物質界に見いだされる主題）をどのように表象するものだろうか？〈渦〉は，運動に現れる「様相」を指し示す言葉であるから，それ自体が〈物体 = material〉ではない．たとえば流体の渦は，物体としては流体なのであり，主題となっている「もの」は，その運動様式なのである．〈渦〉が identity を付与されうる「もの」だというとき，その「もの」とは〈thing〉あるいは〈matter〉に相当する概念である．

---

[1] この主張は，ソシュール (Ferdinand de Saussure; 1857–1913) が言語の共時態を分析したとき気付いたポイント「もともと同一性が定まった言葉（ラング）などなく，言葉は記号の〈差異化〉する作用としてしか存在しない」という発見と合流し，それ以降の記号論，構造主義，ポスト構造主義の系譜へ発展してきた．現代の哲学は，表面的な identity が措定される背景（隠された意図，権力の浸透を許す構造，ノルム＝正準性を規定しようとする権威）に批判の目を向ける．たとえば，男・女という二項の措定が覆い隠そうとするジェンダーのより深刻な問題を，フーコー (Michel Foucault; 1926–1984) は「知の考古学」という方法であぶりだそうとした．デリダ (Jacques Derrida; 1930–2004) は，二項対立を融和的に解消しようとする弁証法を批判し，二項の関係の内に暗黙化されている「主・従」,「中心・周辺」の位置を反転して差異をずらそうと企てたのである．

このような「もの」の類例を求めるならば，量子論における〈波動関数 = matter wave〉の固有モードが適切であろう．たとえば電子の波動関数は，電子の「状態」を記述するための表象であり，その固有モード（たとえば S 電子，P 電子）は〈量子化 = quantization〉によって identity が付与される（差異化される）．

固有モードというとき，時間の概念が挿入されることに注目しよう（ベルグソンの指摘を想起しよう）．固有モードとは，ある恒久的な状態を意味している．恒久性によって identity が生じるのである．固有モードを特徴づける固有値は波動関数の固有振動数に相当する（力学理論では，時間とエネルギーが共役関係を作るので，固有値はエネルギーの準位を意味する）．固有値の差異によって状態の差異が指定されるのである．分子を組織しない電子（原子核に捕捉されていない電子）は，空間を自由に動き回り，固有の状態＝恒久的な identity が定まらない．自由電子の運動は連続スペクトルの領域によって表象され，非定常性，カオスが物理の主題となる．

この例は，物理においても，その主題とするところの「もの」の identity の成立が a priori なものでなく，むしろ現象の中から立ち現れるということを示している．現象と identity（「もの」として名指すこと）の関係を，さらに深く考えよう．

1.1.2 コペルニクス的転回（***Kopernikanische Wende***）

私たちが直接的に認識することができるのは〈現象 = phenomenon〉である．[2] 現象は連綿として全宇宙に広がる混沌である．私たちは，これを主題に応じて様々に分節化し,「個々の事象」を認識・記述・分析するために「もの」を概念として措定する.「もの」は主観に対して二次的（派生的）である.「もの」という客観に先だって主題の選択という主観があるのだ．では「もの」の認識＝客観が一般性をもつのはなぜか？カントは，主観の側に *a priori* な形式があり，それにしたがって認識が構成されるからだという．

このような主観と客観の位置関係は，普通の考えかたを反転している —普通は，対象の唯一性が客観に統一を与え，主観の中に生じる認識を規定すると考えるのである．カントの〈コペルニクス的転回〉とは，逆に主観の側に対象を規定する *a priori* な形式があるという逆転した考え方なのである．

---

[2] 一方，認識主観から独立した（むしろ認識不可能な）それ固有の存在を〈もの自体 = Ding an sich〉と呼び，カントは「もの」にこの二面性を与える.「現象」と「もの自体」が同時的な二面性であるという考え方は，二元論的な曖昧さを可能にする.「人」というものは，現象としては自然法則にしたがい，一方で「もの自体」として自律的である（自由意思に従う）と考える余地を生むのである．しかし，自然科学の冷徹な見方では，生命とは第一義的に「現象」であり,「生物」という概念は，時空間に局所化した一連の有機化学反応に対して，それを「もの」としてモデル化するために措定された identity である．ミクロの世界では個体の境界は限りなく曖昧であり，物質的にも極めて流動的・開放的である．また意識と呼ばれる現象も，エス（フロイトがニーチェから転釈して用いた語：非人称的な自然現象としての精神活動であり，自我および超自我と対立する）と外界という二つのカオスの境界に生起する不安定な現象なのだ．

Fig. 1.1 カント (Immanuel Kant: 1724–1804) はニュートンの自然哲学に大きな影響を受けたといわれる．時空に関する理解は物理学の理論に通底する．

カントのいう「認識の *a priori* な形式」とは，端的に言えば〈時空間 = space-time 〉に他ならない．空間という認識形式は，生物という「もの」が自らの外延と環境の関係を認識するという原始的な次元に起源しているはずであり，これがあらゆる人に先天的に備わる普遍形式であると考えることに異論は少ないであろう．時間という認識形式は，もう少し高度であるが，やはり身体性に根差した古い起源をもつ *a priori* な形式にちがいない．生命現象の本質は反復にあるとするならば，回帰性やリズムあるいは変調を認識する形式として時間が必要となる．時間を空間と併置する物理の理論形式に対しては異論も多くあるが，物理的な運動に限らず，連続的な変化を表現するためには時空間で運動を規定するのが最も自然である．

さて，このような古典の地平で〈渦〉とは何かを問い直すと，それは「時空間の歪み」だと考えるのが最もふさわしい．時空間は，もはや *a priori* な形式ではなく，現象によって歪む.〈渦〉は「もの自体」というよりも現象であり，さらに客観の「対象」であるというよりも客観を「記述する形式の問題」として立ち現れる．

このことを，物理の言葉で説明しよう．

1.1.3 時空間と「もの」

物理の基本的な文法は,「事象」を「時空間」におかれた「もの」として記述する．時空間は幾何学によって具体化され,「もの」はエネルギーによって具体化される．

「もの」の状態を〈ベクトル = vector 〉によって表現できるとする．このベクトルが棲む線形空間を〈状態空間 = phase space〉という．古典力学では配置

空間（n 次元多様体 X）と運動量空間（X の余接ベクトル束 $T^*(X)$）の直積空間だとする．量子力学では配置空間（X）上の関数空間（あるいは関数の準層）を考える．

「もの = エネルギー」の具体的な表現をハミルトニアンという．すなわちハミルトニアン H とは，状態空間上で定義された実数値の関数であり，[3] これが「もの」の identity だと考えるのだ．

物理的世界（物体の運動を記述する時空間）の幾何学は〈シンプレクティック幾何学〉とよばれる（私たちは第 3 章でその一般化を考えることになる）．運動は「もの = エネルギー」が保存するように起こる (identity とは不変性であるから)．したがって，エネルギーの勾配（位相空間における）と直交する向きへ運動が起こることになる．運動方程式の一般的な形式は，状態ベクトルを u, エネルギーを $H(u)$ と書くと，

$$\frac{d}{dt}u = \mathscr{J}\partial_u H(u) \tag{1.1}$$

となる．ここで $\mathscr{J}$（以下〈Poisson 作用素〉と呼ぶ）はある反対称作用素であり，勾配ベクトルをそれに直交する向きへ変換する働きをする．この $\mathscr{J}$ がシンプレクティック幾何学の構造を定めているのである（第 3.1 節参照）．

通常の「正準力学系」では，$\mathscr{J}$ は正則な全単写である.〈渦〉が時空間の歪みであるといったのは，$\mathscr{J}$ の「特異性」として〈渦〉を認識することができる，という意味である．このことを説明するのが本講義の主要な目的である．

1.2 渦の数学的表現と数理物理としての問題

1.2.1 渦に係る数学的な表現

本講義において〈渦〉とは “curl” によって計られる場の歪みの基本量であって，これを一般次元に拡張すると，1 次微分形式の外微分として表わされるもの全てである．さらに広く展望すると，外微分と内部積を組み合わせた Lie 微分やシンプレクティック 2 次形式に対応する Poisson 括弧積なども〈渦〉を表現する数学的形式といってよい．

具体例を書くと，流速ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対して渦度

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V},$$

電磁場のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ に対して磁場

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A},$$

4 次元ポテンシャル A^μ に対して Faraday テンソル

---

[3] 量子論では，ハミルトニアン $\mathscr{H}$ は状態ベクトル = 波動関数（ψ）に作用する作用素であるとし，汎関数 $H(\psi) := \langle \mathscr{H}\psi, \psi\rangle/2$ がエネルギーを与える．

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu},$$

オブザーバブル f に対して Poisson 括弧式

$$\{H, f\} = \mathscr{J}^{jk} (\partial_j H)(\partial_k f)$$

（$\mathscr{J}^{jk}$: Poisson 行列，H: Hamiltonian）などである．

curl は微分によってベクトル場の局所的構造をはかる概念であるが,〈渦〉の本来の特徴はむしろ大域的な構造である．Stokes の定理にしたがって計算すると，

$$\int_{\Sigma} \nabla \times \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nu} ds = \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{t} d\ell, \tag{1.2}$$

ただし，Σ は滑らかな境界 $\partial\Sigma$ をもつディスク状の面，$\boldsymbol{\nu}$ は Σ 上の単位法線ベクトル，ds は面積測度，$\boldsymbol{t}$ は $\partial\Sigma$ の単位接線ベクトル，$d\ell$ は線測度である．$\boldsymbol{V}$ が渦度をもつということは，右辺の周回積分（これを〈循環 = circulation〉という）が値をもつことを意味する．正確にいうと，任意のループ Σ について循環が 0 であるならば渦なし（$\nabla \times \boldsymbol{V} \equiv 0$）であるが，この逆は領域のトポロジーが単純でない場合は必ずしも正しくない．第 2.2 節参照．

1.2.2 渦の物理とは —流体力学，電磁気学，熱力学

時空の曲率に関する理論を重力理論と呼ぶように，時空のねじれ (helicity) に関する理論が〈渦理論〉だといってよいだろう．重力，遠心力，静電力のグループに対して，渦は Coriolis 力，磁力の仲間を構成する．その特徴は「運動の方向を変えようとするが，仕事をしない」ことにある．したがって，エネルギーではなく，運動量の変形として表現される．物質が電荷をもつと運動量 $m\boldsymbol{V}$ は正準運動量 $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{V} + q\boldsymbol{A}$ になる．これによって，渦度は磁場をまとった正準渦度（逆に見れば，渦度をまとった一般化磁場）$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{\omega} + q\boldsymbol{B}$ になる．プラズマの運動を支配するのは，この正準渦度である．

渦現象の面白さは，渦とスカラー（さらには他の次数の場）という本来異なる特性のものが関係することである．たとえば，気圧の変動が渦を生み，逆に渦は気圧の変化を伴う．しかし，スカラー Φ が定義するベクトル $d\Phi \equiv \nabla\Phi$ には渦がない．この関係（すなわち完全系列）を「不完全化」して渦を生じさせるのは空間の不均一である．ある変動量 $\tilde{Q}$ の循環とは $\oint \tilde{Q}$ のことであるが，$\tilde{Q}$ が完全微分形式 $d\Phi$ であるとき $\oint d\Phi = 0$ となる．これが「渦なし」ということの積分表現であるが，空間が歪んで $d\Phi \to \mu d\Phi$ （いわゆる Clebsch 形式）となると循環すなわち渦（$d(\mu d\Phi) = d\mu \wedge d\Phi$）が生じる．

エネルギー，仕事，熱の関係 (第一法則)

$$d\mathscr{E} = \tilde{W} + \tilde{Q} \tag{1.3}$$

を，渦とサイクルの関係として読み解こう．4 次元時空で考える．流体速度 U_{μ} と場のテンソル $M^{\mu\nu} = \partial^{\mu} P^{\nu} - \partial^{\nu} P^{\mu}$ をもちいて力学の部分を $d\mathscr{E} - \tilde{W} = U_{\mu} M^{\mu\nu}$ と書くことができる．さらに熱の部分 $\tilde{Q}$ をエントロピーで書くと

$$U_\mu M^{\mu\nu} = T(dS - \tilde{S}') \tag{1.4}$$

を得る．$M^{\mu\nu}$ は 4 次元正準運動量 P^μ の「時空渦」である．運動量の循環の時間変化は

$$\frac{d}{ds}\oint_{L(s)} P^\nu dx_\nu = \oint_{L(s)} U_\mu M^{\mu\nu} dx_\nu \tag{1.5}$$

となる（ループ $L(s)$ 上の各点は $dx_\mu(s)/ds = U_\mu$ で運動するとする；Note 1.1 参照）．前式から，これは熱のサイクル $\oint \tilde{Q} = \oint T(dS - \tilde{S}')$ とバランスする．準静的 $(\tilde{S}' = 0)$ であっても，TdS（あるいは SdT）が完全微分でなければ，渦が生まれる（Note 1.2 参照）．

*Note 1.1 (*相対論的な *Kelvin* の循環定理*).* (1.5) において s は固有時間である．ループ $L(s)$ は 4 次元時空の中のループであり，ある規準系の時間 t でみると，$L(s)$ 上の各点は共時性が壊れていることに注意しよう．非相対論的な極限では $L(t)$ と近似してよく，その場合は，(1.5) に通常の非相対論的流体運動方程式を用いて〈Kelvin の循環法則〉を得る：

$$\frac{d}{dt}\oint_{L(t)} \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{t}d\ell = \oint_{L(t)} [\partial_t \boldsymbol{P} + (\nabla\times\boldsymbol{P})\times\boldsymbol{V}]\cdot\boldsymbol{t}d\ell = -\oint_{L(t)} n^{-1}\nabla p\cdot\boldsymbol{t}d\ell$$

逆に，相対論の枠組みに戻って考えると，厳密に保存されるのは時空のなかを運動するループ $L(s)$（s は固有時間）に係る循環 $\oint_{L(s)} P^\nu dx_\nu$ である．ある規準系で定義したループ $L(t)$（t は規準系の時間）について循環を計算すると

$$\frac{d}{dt}\oint_{L(t)} \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_{L(t)} (T/\gamma)dS$$

となる．たとえ TdS が完全微分でも，γ と S は無関係であるから，右辺は一般に 0 でない．相対性原理によって生じる時空間の歪みが渦＝磁場を生みだすのである [2]．このメカニズムは，初期宇宙だけでなく，高エネルギー天体や強力なレーザー場などでも重要な働きをしていると考えられる．

Note 1.2 (Boussinesq の浮力モデルと渦生成*).* なべ底を加熱して熱対流の渦が生まれるというお馴染みの現象は，理論的に突き詰めれば，SdT の完全性が重力場によって壊されていること，重力が S を歪めているからだということができる．普通は流体に働く浮力の項が熱対流を生みだすと説明するのだが，その根本がエントロピーの不均一にある．浮力の表現であるいわゆる Boussinesq モデルを書き換えてみよう．重力 $\boldsymbol{g} = -\nabla(mGx)$ が作用する流体の運動方程式は

$$m[\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}] = \frac{-\nabla P}{n} + \boldsymbol{g}, \tag{1.6}$$

と書ける．平衡状態（右辺の力=0）を $n_0^{-1}\nabla P_0 = \boldsymbol{g}$ と書いて平衡圧力 P_0 と平衡密度 n_0 を定義する．温度の小さな揺らぎ $\tilde{T}$ によって起こる密度の揺らぎ $\tilde{n}$ を

$$\tilde{n} = \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_P \tilde{T} \equiv \alpha n_0 \tilde{T}.$$

と評価する（等圧過程を考える）．これを用いて，

$$\frac{-\nabla P}{n}+\boldsymbol{g}=\frac{-\nabla(P_0+\tilde{P})}{n_0+\tilde{n}}+\boldsymbol{g}\approx\frac{-\nabla\tilde{P}}{n_0}+\frac{\tilde{n}\nabla P_0}{n_0^2}=\frac{-\nabla\tilde{P}}{n_0}+\frac{\alpha\tilde{T}\nabla P_0}{n_0}. \tag{1.7}$$

と書く．これが浮力の Boussinesq モデルである．平衡密度 n_0 はしばしば定数と近似される．このとき (1.7) の第 2 項のみが完全微分でない可能性があり，渦の生成項になりえる．

Boussinesq モデルの渦生成項をエントロピーで書き直してみよう．Maxwell の関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=\frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_P=\frac{\alpha}{n},$$

を用いて

$$\alpha\frac{\nabla P_0}{n_0}=\nabla S_0,$$

したがって (1.7) の第 2 項は

$$\frac{\alpha\tilde{T}\nabla P_0}{n_0}=\tilde{T}\nabla S_0$$

とかき直すことができる．(1.7) の第 1 項の方は (n_0 と T_0 は定数と近似し，モルエンタルピー h を用いて)

$$\frac{-\nabla\tilde{P}}{n_0}=-\nabla\tilde{h}+T_0\nabla\tilde{S},$$

と書けるから，(1.7) は $-\nabla h+T\nabla S+\boldsymbol{g}$ の線形近似に他ならないことが分かる．

References

1. 吉田善章；非線形とは何か —複雑系への挑戦（岩波書店，東京，2008）pp. 201+xii; Z. Yoshida; *Nonlinear Science —The Challenge of Complex Systems* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2010) pp. 211+xii.
2. S.M. Mahajan and Z. Yoshida, Twisting space-time: Relativistic origin of seed magnetic field and vorticity, Phys. Rev. Lett. **105** (2010), 095005.

Chapter 2
基本的な概念の準備

この講義で用いる基礎的な数学の概念や記号，定理などについて簡単にまとめておこう．流れや渦という物理の概念を数学的に表現するためには，ベクトル場をあつかう幾何学と関数解析が必要になる．電磁気学や流体力学で現れる grad, curl, div といった，微分幾何学の微分作用素に関して，これらを統一的に理解すること，これらの微分作用素が関数空間に与える構造を理解することが本章の目的である．さらに詳しくは参考書 [1] を参照されたい．

2.1 ベクトル場の表現と分類（基本的な例）

ベクトル場に係る理論では，それをどのように「表現するか」が鍵となる．ベクトル場をいろいろな「ポテンシャル（原始形式）」で表現することで，そのベクトル場の本質が現れたり，ベクトル場を支配する法則が簡単化されたりする．ここでは，まず具体的な（よく知られた）例を示し，数学的問題のポイントを明らかにしよう．

古典電磁気学では，電磁場はそれぞれ 3 次元のベクトル場である電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ と磁場ベクトル $\boldsymbol{B}$ によって表現される．

電磁気学で習うように，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ をみたす磁場場 $\boldsymbol{B}$ は，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて，

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{2.1}$$

と書くことができる．この式は，$\boldsymbol{B}$ を既知のベクトル場，$\boldsymbol{A}$ を未知変数と考えると偏微分方程式である．ここで $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ は，方程式 (2.1) の「可解性条件」である．実際，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}\neq 0$ のときは，(2.1) の解を得ることは不可能である —(2.1) の両辺の div を計算してみよ．

以上はベクトルポテンシャルについてであるが，スカラーポテンシャルには別の存在条件がある．$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ をみたす電場 $\boldsymbol{E}$ は静電場と呼ばれる．静電場はスカラーポテンシャル ϕ を用いて

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi \tag{2.2}$$

と書くことができる．この場合は，$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ が (2.2) を ϕ について解くための（つまりスカラーポテンシャルが存在するための）必要条件である —(2.2) の両辺の curl を計算してみよ．

以上の例により，ベクトル場の基本的な特性 —どのような「ポテンシャル（原始関数）」で表現できるか— は，基本的な微分作用素（grad, curl, div）によって規定されていることがみえてきた．div が 0 のベクトル場は，ポテンシャルの curl で表される．curl が 0 のベクトル場はポテンシャルの grad で表されるといえそうである．これらの関係によって「ベクトル場の分類」がなされる．

ただし，div が 0 であるとか curl が 0 であるとかは「微分条件」であり，一方ベクトルポテンシャルがあるとかスカラーポテンシャルがあるとかは「積分可能条件」である．当然，後者はより高度な問題である．偏微分方程式 (2.1) あるいは (2.2) の可解性必要十分条件を，境界条件の与え方も含めて（実は境界値だけでなく，領域のトポロジーに関係する積分条件も必要になる）厳密に解決しておく必要がある

2.2 微分形式

2.2.1 ベクトル場と微分形式

ベクトル場（ベクトル値関数）の理論は，スカラー場をあつかう理論にはない幾何学的な概念が必要となる．その基本的な事項をまとめておく．

n 次元のベクトル $\boldsymbol{u}$ は，正規直交基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \cdots, \boldsymbol{e}^n\}$ を用いて

$$\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \boldsymbol{e}^j$$

と表示できる．ここで，デカルト座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を用いて

$$\boldsymbol{e}^j = \nabla x^j \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.3}$$

と表されることに注目しよう．

記号的に，関数 $f(\boldsymbol{x})$ の勾配（gradient）∇f を df と書くことにする．あとの議論で，この d は勾配を包含する〈外微分= exterior derivative 〉という概念に一般化される．その準備として，〈微分形式 = differential form 〉の概念を導入する．

n 次元ベクトル場の基底を

$$\{dx^1, dx^2, \cdots, dx^n\} \tag{2.4}$$

と表すと[1]，ベクトル場 $\boldsymbol{u}(x^1, \cdots, x^n)$ は

[1] dx^j はベクトル（接ベクトル）に対して，各位置において，その第 j 成分を対応させる線形形式を意味する．すなわち，接ベクトル空間の共役空間（余接ベクトル空間）の基底である．

$$\boldsymbol{u}(x^1,\cdots,x^n)=\sum_{j=1}^{n}u_j(x^1,\cdots,x^n)\,dx^j$$

と表示される．これを 1 次の微分形式（1-form）という．以下，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ を微分形式と思うときはイタリック体で u と書く．

2 つの 1-form，$u=\sum u_j dx^j$, $v=\sum v_j dx^j$ の〈外積 = exterior product 〉を

$$u\wedge v=\sum_{j,k=1}^{n}u_j v_k\,dx^j\wedge dx^k$$

と定義する．ここで $\wedge$ は反対称関係

$$dx^j\wedge dx^k=-dx^k\wedge dx^j \tag{2.5}$$

を満たすとする．(2.5) から $dx^j\wedge dx^j=0$ が導かれる．この約束により

$$u\wedge v=\sum_{j<k}(u_j v_k-u_k v_j)dx^j\wedge dx^k$$

と表される．微分形式 $u\wedge v$ は $\{dx^j\wedge dx^k; 1\le j<k\le n\}$ を基底とするベクトル場と同一視される．これは $\binom{n}{2}$ 次元であり，2 次の微分形式（2-form）と呼ばれる．

一般に p 次の微分形式（p-form）は

$$\{\mathrm{sgn}(\sigma_j)dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_p}; 1\le j_1<\cdots<j_p\le n\} \tag{2.6}$$

で張られるベクトル場と同一視され，次元は $\binom{n}{p}$ である．ただし，$\mathrm{sgn}(\sigma_j)$ は置換 σ_j の符号を表す．例えば $(n-1)$-form の基底は

$$\{(-1)^{n-j}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{j-1}\wedge dx^{j+1}\wedge\cdots\wedge dx^n;\ 1\le j\le n\} \tag{2.7}$$

である．p-form と q-form の外積は $(p+q)$-form となる．特に重要なのは 1-form と $(n-1)$-form である．どちらも n 次元ベクトル場と同一視できるからである．また，0-form と n-form はスカラー場と同一視できる．

2.2.2 外微分

以下，変数 x に関する偏微分を ∂_x と表記する．ベクトル場の基底を (2.4) と定義することによって，スカラー場（0-form）w に対して

$$dw=\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x^j}w)\,dx^j$$

はベクトル場（1-form）∇w を意味するのであった．すなわち，0-form から 1-form への写像 d は勾配（gradient）である．これを一般化して，p-form から $(p+1)$-form への写像として外微分 d を定義する．r-form （$r \leq n-1$）

$$u = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_r} u_{j_1\cdots j_r} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}$$

の〈外微分 = exterior derivative〉を

$$du = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_r} (du_{j_1\cdots j_r}) \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}$$

により定義する．これは $(r+1)$-form になる．あるいは

$$du = \sum_{\ell} dx^{\ell} \wedge (\partial_{x^\ell} u)$$

と書くこともできる．

以下，空間次元 n が 2 および 3 の場合について，外微分を具体的に表現して固有の名称を与えておく．$n=2$ の場合について，デカルト座標を $x^1 = x$, $x^2 = y$ と書く．1-form の基底を $\{dx,\, dy\}$，2-form の基底を $\{dx \wedge dy\}$ とする．0-form から 1-form への外微分を勾配と呼び，grad または ∇ と表す．1-form から 2-form への外微分を回転と呼び，curl と表す．これらの作用を具体的に書くと，

$$dw = (\partial_x w)dx + (\partial_y w)dy,$$
$$d\,(u_x dx + u_y dy) = (\partial_x u_y - \partial_y u_x)\, dx \wedge dy.$$

ベクトルとして成分表示すると

$$\mathrm{grad}\; w = \begin{pmatrix} \partial_x w \\ \partial_y w \end{pmatrix}, \quad \mathrm{curl} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \partial_x u_y - \partial_y u_x$$

と書ける．[2]

空間次元 $n=3$ の場合は，1-form, 2-form 双方とも 3 次元のベクトル場と同一視できる．デカルト座標を $x^1 = x$，$x^2 = y$，$x^3 = z$ と書き，1-form，2-form，3-form の基底をそれぞれ $\{dx, dy, dz\}$, $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$，$\{dx \wedge dy \wedge dz\}$ とする．0-form から 1-form への外微分を勾配と呼び，grad または ∇ と表す．1-form から 2-form への外微分を回転と呼び，curl または $\nabla \times$ と表す．2-form から 3-form への外微分を発散と呼び，div または $\nabla\cdot$ と表す．ベクトルとして成分表示すると

[2] $n=2$ の場合の div すなわち $\boldsymbol{u} = u_x \boldsymbol{e}_x + u_y \boldsymbol{e}_y$ に対して $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \partial_x u_x + \partial_y u_y$ は，やや技巧的であるが，次のようにして導かれる．$(n-1)$-form すなわち $(2-1)$-form の基底を $\{dy, -dx\}$ ととる（上記の 1-form の基底と比較せよ；1-form と $(2-1)$-form を区別するのだ）．２次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $(2-1)$-form $u = u_x dy - u_y dx$ と同一視する．この場合，$du = (\partial_x u_x + \partial_y u_y) dx \wedge dy$. したがって，$d : (2-1)\text{-form} \to 2\text{-form}$ が div である．

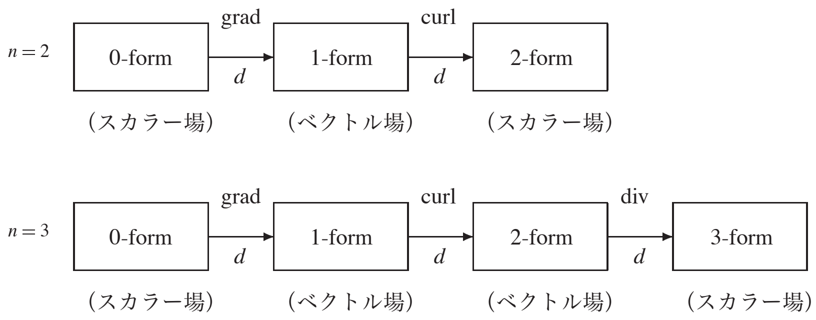

Fig. 2.1 2 次元および 3 次元の場合の微分形式，外微分（grad, curl, div）の関係．ただし 2 次元の div については脚注 2 を参照．

$$\mathrm{grad}\, w = \begin{pmatrix} \partial_x w \\ \partial_y w \\ \partial_z w \end{pmatrix}, \quad \mathrm{curl}\, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \partial_y u_z - \partial_z u_y \\ \partial_z u_x - \partial_x u_z \\ \partial_x u_y - \partial_y u_x \end{pmatrix},$$

および $\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z$ と書ける．$n = 2$ および $n = 3$ の場合の微分形式と外微分を図 2.1 にまとめる．

次に，外微分の共役作用素を導入しよう．$\mathbb{R}^n$ において定義された 2 つの p-form a と b の内積を

$$(a,b)_p = \int \sum_{j=1}^{\nu} a_j \overline{b_j}\ d^n x \tag{2.8}$$

と定義する．[3] ただし $\nu = \binom{n}{p}$ は p-form のベクトルとしての次元，a_j, b_j は a, b の第 j 成分を表す．$dx = dx^1 \cdots dx^n$ は $\mathbb{R}^n$ の体積測度である．積分は全空間にわたってとるが，a, b の台は $\mathbb{R}^n$ の有界集合であると仮定する．

$(p-1)$-form ω によって $a = d\omega$ と与えられる場合に，

$$(d\omega,\, b)_p = (\omega,\, \delta b)_{p-1} \quad (\forall \omega, b) \tag{2.9}$$

によって d の共役作用素 δ を定義する．δ は p-form から $(p-1)$-form への写像を与える．[4]

部分積分によって共役作用素の具体形をみることができる．空間次元 $n = 2$ の場合，0-form から 1-form への外微分 d（gradient）に対しては，

$$(dw,b)_1 = \int \left[(\partial_x w)\overline{b_x} + (\partial_y w)\overline{b_y} \right]\ dxdy = -\int w(\partial_x \overline{b_x} + \partial_y \overline{b_y})\ dxdy$$

---

[3] 一般的に書くと $(a,b)_p := \int a \wedge *\overline{b}$, ここで $*$ は Hodge のスター作用素であり，p-form を $(n-p)$-form へ写す．したがって，$a \wedge *\overline{b}$ は常に n-form となる．

[4] Hodge のスター作用素を用いて書くと，$\delta = -*d*$ である．

$$n=2 \quad \boxed{\text{0-form}} \xleftarrow[\delta]{\text{-div}} \boxed{\text{1-form}} \xleftarrow[\delta]{\text{curl*}} \boxed{\text{2-form}}$$

$$n=3 \quad \boxed{\text{0-form}} \xleftarrow[\delta]{\text{-div}} \boxed{\text{1-form}} \xleftarrow[\delta]{\text{curl}} \boxed{\text{2-form}} \xleftarrow[\delta]{\text{-grad}} \boxed{\text{3-form}}$$

Fig. 2.2 共役作用素 δ と grad, curl, div の関係.

により $\delta\overline{b} = -(\partial_x\overline{b_x} + \partial_y\overline{b_y})$ を得る．したがって，1-form から 0-form への δ は発散（divergence）と同一視される．1-form から 2-form への外微分 d（curl）に対しては

$$(du,b)_2 = \int(\partial_x u_y - \partial_y u_x)\overline{b}\ dxdy = \int \left[u_x(\partial_y\overline{b}) - u_y(\partial_x\overline{b})\right]\ dxdy$$

により，2-form $\overline{b}$ から 1-form への写像 δ が与えられる．この微分を curl* と書くことにする．ベクトルとして成分表示すると

$$\mathrm{curl}^*\overline{b} = \begin{pmatrix} \partial_y\overline{b} \\ -\partial_x\overline{b} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

空間次元 $n=3$ の場合についても同様に計算できる．図に 2.2 に $n=2,3$ の場合の δ をまとめる．

2.2.3 閉微分形式と完全微分形式

これまで外微分を表すために使った記号 dx に対して，変数 x に関する積分という意味を付与する．1-form $\omega = \sum_{j=1}^n u_j dx^j$ に対して一つの曲線 γ を与え

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \sum_{j=1}^n u_j(x^1,\cdots,x^n)\ dx^j$$

という線積分を考えることができる．2-form に対しては，$dx^j \wedge dx^k$ が面積要素の x^j-x^k 成分を与えると考えるならば，曲面についての面積積分が定義できる．一般に，p-form に対しては p 次元の図形を与えて p 次元の積分を定義できる．このように，p-form と p 次元の図形は「共役関係」にあると考えることができる．

ある $(p-1)$-form φ が存在して $\omega = d\varphi$ と表されるとき，ω は〈完全微分形式 = exact form 〉であるという．このとき φ を ω の〈ポテンシャル = potential 〉あるいは原始微分形式と呼ぶ．また，p-form ω が〈閉微分形式 = closed form 〉であるとは $d\omega = 0$ を満たすことをいう．外微分の定義にしたがって計算すると，容易に次の定理を得る．

Theorem 2.1. 完全微分形式は閉微分形式である．すなわち，任意の 2 回連続微分可能な（C^2 級）微分形式 φ に対して $d^2\varphi = 0$．

2 次元と 3 次元の場合には，外微分のニックネーム（図 2.1）を用いて，Theorem 2.1 を表すと，

$$\mathrm{curl}\,(\mathrm{grad}\, w) = 0, \quad \mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\, \boldsymbol{u}) = 0 \quad (\forall w, \boldsymbol{u}) \tag{2.11}$$

というベクトル解析の基本的な関係式を得る．

一般には，Theorem 2.1 の逆は成立しない．反例をみよう．$n = 2$ とし，穴のある領域

$$\Omega^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, \sqrt{|x|^2 + |y|^2} > \rho\} \qquad (\rho > 0)$$

を考える．Ω^+ において定義された滑らかな 1-form

$$u = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2) \tag{2.12}$$

は閉微分形式である．しかし，$u = \mathrm{grad}\theta$ と書こうとすると，$\theta = \tan^{-1}(y/x)$ となり，ポテンシャルは多価関数になってしまう．

この例のように，閉微分形式と完全微分形式の差は，領域のトポロジーに深く関連している．領域について適当な仮定を設けると, Theorem 2.1 の逆の命題が成立する．次の古典的な定理がある．

Theorem 2.2 (Poincaré の補題). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は，その全ての座標 x^j がそれぞれ一つの区間 (α^j, β^j) に含まれるとする．Ω において，連続微分可能な p 次（$p \geq 1$）閉微分形式 ω を考える（すなわち，Ω 内で $d\omega = 0$ とする）．このとき，$(p-1)$ 次微分形式 φ が存在し，Ω 内で $\omega = d\varphi$ と表すことができる．

2.2.4 コホモロジー群

Theorem 2.1, 2.2 によると，局所的には，完全微分形式であることと閉微分形式であることは等価である．しかし，グローバルには両者は等価ではない．閉微分形式と完全微分形式の違いは領域のトポロジーと共役な関係として整理できる．

2 つの p 次閉微分形式 u, v の差が完全微分形式で与えられるとき，両者を同一のグループに属すとみなして $u \sim v$ と書く．すなわち

$$u \sim v \quad \Longleftrightarrow \quad u - v = d\omega \quad (\exists \omega)$$

とする．関係 $\sim$ を「同値関係」と呼び，これによって p 次閉微分形式の全体を分類する．一つの「類」に属する u, v は $u \sim v$ の関係を満たすものとする．類の集合を「商集合」という．完全微分形式の集合によって同値関係 $\sim$ を定義して分類された p 次閉微分形式の商集合を

$$\{\text{closed p-form}\}/\{\text{exact p-form}\}$$

と書き，これを p 次の〈de Rham コホモロジー群 = cohomology〉と呼ぶ．ここでは，これを略して単にコホモロジー群ということにしよう．

コホモロジー群の各類を代表する元として

$$(u, d\chi)_p = 0 \quad (\forall \chi) \tag{2.13}$$

を満たすものをとることができる（$(\ ,\ )_p$ は p-form の内積を表す；(2.8) 参照）．実際，2 つの異なる u_1, u_2 が (2.13) を満たすならば，

$$(u_1 - u_2, d\chi)_p = 0 \quad (\forall \chi) \tag{2.14}$$

が成り立つ．仮に $u_1 - u_2 = d\omega$ と書けるとすると，(2.14) は成り立ち得ない．つまり，(2.14) は u_1, u_2 が異なる類に属することを意味する．したがって，各類は (2.13) を満たす元によって代表される．

(2.13) において部分積分をおこなうと，この関係式は共役作用素と境界条件によって表すことができる．例えば，領域 Ω が $\mathbb{R}^2$ あるいは $\mathbb{R}^3$ に含まれる有界領域とし，1-form の分類を考えよう．

$$\begin{aligned}(u, d\chi)_1 &= \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{grad}\, \overline{\chi}\, dx = -\int_\Omega (\mathrm{div}\, \boldsymbol{u})\, \overline{\chi}\, dx + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \overline{\chi} ds \\ &= (\delta u, \chi)_0 + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \overline{\chi} ds\end{aligned}$$

と計算される．ただし dx は $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ の体積要素，$\partial\Omega$ は Ω の境界，$\boldsymbol{n}$ は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル，ds は $\partial\Omega$ 上の線積分要素を表す．(2.13) を満たすためには $\delta u = 0$ および境界条件 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ が成り立たなくてはならない．u が閉微分形式である条件と合わせると，1 次のコホモロジー群を代表する元は

$$\begin{cases} \mathrm{curl}\, \boldsymbol{u} = 0, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} = 0 & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

によって特徴づけられる．上の 2 つの式を微分形式の記号で書くと

$$du = 0, \quad \delta u = 0 \tag{2.16}$$

と表すことができる．一般に (2.16) を満たす微分形式を〈調和微分形式 = harmonic form〉と呼ぶ．コホモロジー群を代表する閉微分形式は，一定の境界条件を満足する調和微分形式によって与えられるのである．

完全微分形式ではない閉微分形式の例として示した (2.12) は，領域 Ω^+ について (2.15) を満足することがわかる．実は $\mathbb{R}^2$ 内に m 個の穴があいた領域 Ω を考えるとき，(2.15) は m 個の線形独立な解をもつことが示される．これらの調和微分形式は，局所的には完全微分形式と同一視できるので，線積分はホモトピー不変である．

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が球（円盤）と位相的に等価であるとき，Ω は〈単連結 = simply connected〉であるという．単連結な領域内の任意の閉ループは，連続（ホモトープ）な変形によって一点に収縮させることができる．Ω が単連結であるとき，(2.15) を満たす解は $\boldsymbol{u} \equiv 0$ しかない．したがって，1 次コホモロジー群は唯一の元= $\{\text{closed } 1 - form\}$ から成る集合となる．これは，単連結な Ω 上で定義された任意の 1 次閉微分形式は完全微分形式であることを意味する（Theorem 2.2 で仮定した領域の制限を拡張する）．

コホモロジー群が何個の元をもつかは，領域の位相的な構造によって決定される．例えば 1 次閉微分形式については，Ω 内に閉ループを考え，これを連続な変形に関して分類すればよい．すなわち，連続な変形によって重ね合わせることができる閉ループは互いに同値とみなし，この同値関係によって閉ループの類を作る．1 次閉微分形式の線積分はホモトピー不変であるから，同じ類に属する任意の閉ループに関して線積分は同一の値をとる．一点に縮められない閉ループについては，線積分が 0 にならない調和微分形式を一つみつけることができる．こうして，閉ループの類の数だけ独立な調和微分形式を求めると，各々が 1 次コホモロジー群の元を代表する微分形式となる．したがって，1 次コホモロジー群の元の数は閉ループの分類数と一致する．これを〈ジーナス = genus; 種数)〉あるいは第 1Betti 数という．

2.3 関数空間

2.3.1 基本的な関数空間とその表記

基本的な関数空間の記号と意味を以下にまとめる．

- $C(\Omega)$:
  開集合 Ω（$\subseteq \mathbb{R}^n$）の上で定義された連続関数の全体集合．
- $C(\overline{\Omega})$:
  閉集合 $\overline{\Omega}$（Ω の閉包）の上で定義された有界連続関数の全体集合．
- $C^k(\Omega)$:
  Ω において k 回連続微分可能な関数の全体集合．
- $C_0^k(\Omega)$:
  $C^k(\Omega)$ の元であり，しかも Ω に含まれるコンパクト集合に台をもつ関数の全体集合．
- $\mathscr{D}(\Omega)$:
  $C_0^\infty(\Omega)$ にセミノルムで位相を与えた空間．この共役空間が Schwartz の超関数の空間である．
- $H^k(\Omega)$：

開集合 Ω の上で定義された可測関数で，しかも k 階までの超関数微分が全て $L^2(\Omega)$ の元であるようなものの全体集合（Sobolev 空間）. $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
- $H_0^k(\Omega)$：
  $C_0^\infty(\Omega)$ の $H^k(\Omega)$ における閉包.
- $H^s(\Omega)$，$H_0^s(\Omega)$：
  中間階数 s までの超関数微分に対して一般化された Sobolev 空間.
- $H_0^{-k}(\Omega)$：
  $H_0^k(\Omega)$ の共役空間.
- $L^p(\Omega)$（$1 \le p < \infty$）：
  開集合 Ω の上で定義された可測関数 $f(x)$ で，しかも $|f(x)|^p$（$1 \le p < \infty$）が Ω 上で Lebesgue 可積分であるようなものの全体集合.
- $L^\infty(\Omega)$：
  開集合 Ω の上で定義された可測関数で，しかも Ω 上のほとんど全ての x で有界なもの（本質的に有界な関数）の全体集合.
- $\mathscr{O}(S)$：
  複素平面内の円盤 S 上で正則な関数の全体集合.

2.3.2 Gauss-Green-Stokes の定理

ベクトル関数についても，スカラー関数の場合の記号と同じように $L^2(\Omega)$ などと書くことにしよう．これはベクトル値関数の各成分が $L^2(\Omega)$ に属することを意味する．内積は，ベクトルとしての内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を拡張して

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{g}}\,dx$$

とする．

Theorem 2.3 (一般化された Gauss の定理). Ω ($\subset \mathbb{R}^n$) は C^2 級の境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とする．

$$E(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)\ ;\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)\}$$

と定義する．$\boldsymbol{u} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ に対して，境界 $\partial\Omega$ 上で

$$\gamma_n\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} \tag{2.17}$$

をみたすトレース作用素 γ_n を，$E(\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ [5]の連続線形作用素として定義できる．また，任意の $\boldsymbol{u} \in E(\Omega), f \in H^1(\Omega)$ について「一般化された」

[5] $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ は $H^{1/2}(\partial\Omega)$ の共役空間という意味である．ここで L^2 級のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ について，法線成分のトレース作用素が負の次数をもつ Sobolev 空間 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ への連続作用素として定義できるのは，$\nabla\cdot\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$ と制限しているためであることに注意しよう．

Gauss の定理（あるいは *Stokes* の公式）[6]

$$(\boldsymbol{u}, \nabla f) + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}, f) = \langle \gamma_n \boldsymbol{u}, \gamma_0 f \rangle \tag{2.18}$$

が成り立つ．但し，$L^2(\Omega)$ の内積を $(\cdot,\cdot)$，$L^2(\partial\Omega)$ の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と書いた．

（証明）概要を示す．[7] $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ とする．境界値 φ を Ω 内の関数 f へ拡張することを考える．トレースの逆写像 ℓ_Ω （$\gamma_0 \cdot \ell_\Omega = I$）で $H^{1/2}(\partial\Omega)$ から $H^1(\Omega)$ への連続線形写像となるものが存在する．$f = \ell_\Omega \varphi$ とおき，$\boldsymbol{u} \in E(\Omega)$ に対して

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{u};\varphi) = (\boldsymbol{u}, \nabla f) + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}, f) \tag{2.19}$$

と定義する．$\boldsymbol{u} \in E(\Omega)$ を固定すると，$\mathscr{F}(\boldsymbol{u};\varphi)$ は $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 上の連続線形汎関数である．したがって $\psi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ を用いて

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{u};\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle$$

と表すことができる．次に，$\mathscr{F}(\boldsymbol{u};\varphi)$ を $\boldsymbol{u} \in E(\Omega)$ の関数と考えて，$\psi(\boldsymbol{u}) = \gamma_n \boldsymbol{u}$ と書く．γ_n は $E(\Omega)$ から $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ への連続線形写像である．滑らかな $\boldsymbol{u}, f$ に関しては古典的な Gauss の定理（Stokes の公式）が成り立ち，$\gamma_n \boldsymbol{u} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}$ とすれば (2.18) に矛盾しない．$\gamma_0 f$ は $H^{1/2}(\partial\Omega)$ で稠密にとれるので，(2.17) を得る．最後に (2.19) で，f は $\gamma_0 f = \varphi$ をみたす一般の $H^1(\Omega)$ 関数とする．$\mathscr{F}(\boldsymbol{u};\varphi)$ の値は f のとり方に依存しないことが示される．よって (2.18) を得る． □

ここで $\gamma_n \boldsymbol{u}$ は一般化された意味での境界値の法線成分である．非圧縮性の条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ を $L^2(\Omega)$ の位相で保証すると，$\boldsymbol{u} \in E(\Omega)$ である．したがって，非圧縮ベクトル場については，L^2 の位相で境界値の法線成分が意味をもつ．

上記の定理は，div が $L^2(\Omega)$ で定義される場合の結果であるが，今度は curl が $L^2(\Omega)$ で定義できると仮定すると，接線成分の境界値が定義できるようになる．すなわち，次の定理が同様の議論によって導かれる．

Theorem 2.4 (一般化された Stokes の定理). Ω $(\subset \mathbb{R}^3)$ は C^2 級の境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とし，

$$G(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)\ ;\ \nabla \times \boldsymbol{u} \in\ L^2(\Omega)\}$$

と定義する．$\boldsymbol{u} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ に対して，境界 $\partial\Omega$ 上で

$$\gamma_t \boldsymbol{u} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} \tag{2.20}$$

をみたすトレース作用素 γ_t を，$G(\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ の連続線形作用素として定義できる．また，任意の $\boldsymbol{u} \in G(\Omega), \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)$ について

[6] 一般化されたというのは，微分を超関数の意味でとり，境界値をトレース作用素によって定義するという意味である．

[7] 詳しくは R. Temam [5]，Chap. 1 参照．

$$-(\boldsymbol{u}, \nabla \times \boldsymbol{v}) + (\nabla \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \gamma_t \boldsymbol{u}, \gamma_0 \boldsymbol{v} \rangle \tag{2.21}$$

が成り立つ．

この定理によると，渦なし（$\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$）条件が L^2 の位相で課されたベクトル場は，接線成分のトレースが L^2 の位相で意味をもつ．

以下，便利のために

$$\begin{cases} \gamma_n = \boldsymbol{n} \cdot \\ \gamma_t = \boldsymbol{n} \times \end{cases}$$

と書いて，$\boldsymbol{n}$ をトレース作用素として解釈する．

2.3.3 Weyl-Hodge-Kodaira 分解

第 2.1 節で指摘したように,〈ポテンシャル= potential 〉（すなわち原始関数）を求めることは偏微分方程式を解くことにほかならない．この問題は，ベクトル場の微分的（局所的）性質および領域のトポロジー（マクロな構造）によって可解性が決まる「幾何学的な偏微分方程式」である．第 2.1 節では，ベクトル場の微分的性質と可解性の関係について具体的に（すなわち，$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ が $\boldsymbol{A}$ について解けるためには，$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ であることが必要なことを）みておいた．しかし，領域のトポロジーの問題が未だ残っている．本節では，ポテンシャルの存在問題とトポロジーの関係について，関数空間の直和分解という形で考察する．

以下，空間次元は 3 とする．$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界な領域とし，一般に多重連結の領域を考える．領域の連結性が重要な問題となる．Ω の境界 $\partial\Omega$ は滑らか（C^2 級）であり，縁がない連結曲面に分解されて $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \cdots \cup \partial\Omega_m$ （$1 \le m < \infty$）と書けるとする．滑らかな曲面 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_\nu$ （$\Sigma_j \cap \Sigma_k = \emptyset$; $j \neq k$）を用いて Ω を切断し，

$$\check{\Omega} = \Omega \setminus (\cup_{i=1}^{\nu} \Sigma_i) \tag{2.22}$$

が単連結になるようにする．このとき ν を Ω の第 1 Betti 数といい，$b_1(\Omega)$ と書く．たとえば Ω がドーナツ状の領域であれば，$\nu = 1$ であり，図 2.3 のごとく切断すればよい．Σ_j の両面を Σ_j^+, Σ_j^- と表す．Σ_j 上の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は Σ_j^+ から Σ_j^- の方向にとる．

ベクトル場の関数空間 $L^2(\Omega)$ を次の定理によって直和分解する．それぞれの部分空間は，スカラーポテンシャルあるいはベクトルポテンシャルによって表現されるベクトル場の全体集合を与える．

Theorem 2.5 **(直和分解).** *Ω 上の 3 次元ベクトル場の空間 $L^2(\Omega)$ について，その部分空間*

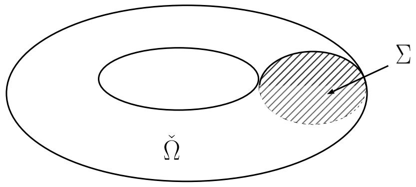

Fig. 2.3 多重連結の領域にカットを入れ，単連結領域をつくる．

$$
\begin{aligned}
L^2_\Sigma(\Omega) &= \{\nabla\times\boldsymbol{w};\ \boldsymbol{w}\in H^1(\Omega),\ \nabla\cdot\boldsymbol{w}=0,\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{w}=0\},\\
L^2_H(\Omega) &= \{\boldsymbol{h}\in L^2(\Omega);\ \nabla\cdot\boldsymbol{h}=0,\ \nabla\times\boldsymbol{h}=0,\ \ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}=0\},\\
L^2_G(\Omega) &= \{\nabla\phi;\ \phi\in H^1(\Omega),\ \Delta\phi=0\},\\
L^2_F(\Omega) &= \{\nabla\psi;\ \psi\in H^1_0(\Omega)\}
\end{aligned}
$$

を考える[8]．

1. これらの部分空間によって，

$$L^2(\Omega) = L^2_\Sigma(\Omega)\oplus L^2_H(\Omega)\oplus L^2_G(\Omega)\oplus L^2_F(\Omega)$$

と直和分解される．

2. 切断面 Σ_j に対する〈流束 = *flux*〉を

$$\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{u}) = \int_{\Sigma_j}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,ds \quad (j=1,\cdots,\nu)$$

と定義する．これを用いて

$$
\begin{aligned}
L^2_S(\Omega) = \{\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega);\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=0,&\\
\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{u})=0\ (j=1,\cdots,\nu)\}&
\end{aligned}
$$

とおくと，$L^2_\Sigma(\Omega)=L^2_S(\Omega)$ である．

Corollary 2.1. 定義から明らかに

$$
\begin{aligned}
Ker(div) &= L^2_\Sigma(\Omega)\oplus L^2_H(\Omega)\oplus L^2_G(\Omega),\\
Ker(curl) &= L^2_H(\Omega)\oplus L^2_G(\Omega)\oplus L^2_F(\Omega)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$L^2(\Omega)$ を直和分解する部分空間を整理して表 *2.1* に示す．

---

[8] $L^2_\Sigma(\Omega)$ の定義において，条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0$ は，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{w}$ のゲージを規定することを意味する．この Coulomb（クーロン）ゲージに限らず，ほかの適当な条件におき換えてもよい．

Table 2.1 3 次元ベクトル場の空間 $L^2(\Omega)$ の直和分解.

部分空間	ベクトル場の表式	$\nabla\cdot\boldsymbol{u}$	$\nabla\times\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}$	流束
$L^2_\Sigma(\Omega)$	$\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{w}\ [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{w}=0 \text{ on } \partial\Omega]$	0	有限	0	0
$L^2_H(\Omega)$	$\boldsymbol{u}=$ harmonic field	0	0	0	有限
$L^2_G(\Omega)$	$\boldsymbol{u}=\nabla\phi\ [\Delta\phi=0 \text{ in } \Omega]$	0	0	有限	有限
$L^2_F(\Omega)$	$\boldsymbol{u}=\nabla\phi\ [\phi=0 \text{ on } \partial\Omega]$	有限	0	有限	有限

Corollary 2.2. ベクトル場 $\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega)$ は

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{h}+\nabla\phi,\\&\quad(\nabla\times\boldsymbol{w}\in L^2_\Sigma(\Omega),\quad \boldsymbol{h}\in L^2_H(\Omega),\quad \nabla\phi\in L^2_G(\Omega)\oplus L^2_F(\Omega))\end{aligned}\tag{2.23}$$

の形に直和分解される *[3]* [9].

ここでは証明の主要な部分について概要を述べる[10]. 滑らかな非圧縮ベクトル場の空間

$$\mathscr{D}_\sigma(\Omega)=\{\boldsymbol{u}\in C_0^\infty(\Omega);\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\}$$

を定義しておく.

Lemma 2.1. ベクトル場 $\boldsymbol{f}\in L^2(\Omega)$ が, あるスカラーポテンシャル $\phi\in H^1(\Omega)$ を用いて $\boldsymbol{f}=\nabla\phi$ と表されるための必要十分条件は

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u})=0\quad(\forall\boldsymbol{u}\in\mathscr{D}_\sigma(\Omega))\tag{2.24}$$

である.

Proof. 必要条件であることは自明である. 一般に線形作用素 $\mathscr{A}$ とその共役作用素 $\mathscr{A}^*$ に対して, $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})^\perp=\overline{R(\mathscr{A}^*)}$ が成り立つ（検証せよ）. $\mathscr{A}\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}$, $D(\mathscr{A})=H^1_0(\Omega)$ とすると, $\mathscr{A}^*\phi=-\nabla\phi$ であり, $\mathscr{A}^*: L^2(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$, $R(\mathscr{A}^*)$ は $H^{-1}(\Omega)$ の閉部分空間であることが示される. $\mathscr{D}_\sigma(\Omega)$ は $\mathrm{Ker}(\mathscr{A})$ に稠密に含まれるので, (2.24) をみたす $\boldsymbol{f}$ は $R(\mathscr{A}^*)$ に属する. よって, ある ϕ が存在して, $\boldsymbol{f}=\nabla\phi$. ポテンシャル ϕ の正則性については, これよりも強い結果が知られており, (2.24) をみたす超関数 $\boldsymbol{f}$（$\in\mathscr{D}'(\Omega)$）に対して, $\phi\in\mathscr{D}'(\Omega)$ が存在する. これは, Poincaré の補題（Theorem 2.2）を拡張する微分幾何学の理論を駆使して証明される [2]. □

[9] これは Poincaré の Theorem 2.2 を一般化した表現である. ここでは, 境界条件が与えられ, さらに領域 Ω に任意のトポロジーが許されている. その代わりに, 多重連結領域を考える場合は調和ベクトル場 $\boldsymbol{h}$ を付加する. これをスカラーポテンシャルの勾配で表すと, 多価関数になる.

[10] 詳細は R. Temam [5], Chap. I および Appendix I を参照されたい.

Lemma 2.2 (Weyl 分解). $\mathscr{D}_\sigma(\Omega)$ の $L^2(\Omega)$ における閉包を $L^2_\sigma(\Omega)$ と書く．このとき

$$L^2(\Omega) = L^2_\sigma(\Omega) \oplus \{\nabla\phi;\ \phi \in H^1(\Omega)\}, \tag{2.25}$$
$$L^2_\sigma(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega);\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = 0\} \tag{2.26}$$

が成り立つ．

Proof. $G = \{\nabla\phi;\ \phi \in H^1(\Omega)\}$ とおく．まず，$\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)$ が全ての $\boldsymbol{u} \in \mathscr{D}_\sigma(\Omega)$ に直交すると仮定しよう．すなわち $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}) = 0$ （$\forall\boldsymbol{u} \in \mathscr{D}_\sigma(\Omega)$）. Lemma 2.1 より，$\boldsymbol{f} = \nabla\phi$ （$\exists\phi \in H^1(\Omega)$）. よって $\boldsymbol{f} \in G$，すなわち $L^2_\sigma(\Omega)$ の直交補空間は G に含まれる．逆に $\boldsymbol{g} = \nabla\phi \in G$ とすると

$$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{u}) = (\nabla\phi,\boldsymbol{u}) = -(\phi,\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = 0, \quad \forall\boldsymbol{u} \in \mathscr{D}_\sigma(\Omega).$$

したがって，G は $L^2_\sigma(\Omega)$ の直交補空間に含まれる．よって (2.25) を得る．

次に (2.26) を証明しよう．

$$X = \{\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega);\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = 0\}$$

と書き，まず $L^2_\sigma(\Omega) \subseteq X$ を示そう．$\boldsymbol{u} \in L^2_\sigma(\Omega)$ に対して，その近似列 $\{\boldsymbol{u}_m \in \mathscr{D}_\sigma\}$ を考える．$L^2(\Omega)$ で $\lim \boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{u}$ とする．超関数の意味の微分は連続作用素であるから，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_m = 0$ より $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ が得られる．また，$\boldsymbol{u} \in E(\Omega)$ であるから，Theorem 2.3 より，$E(\Omega)$ で連続なトレース $\boldsymbol{n}\cdot$ が存在する．$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}_m = 0$ より $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = 0$ がしたがう．よって $L^2_\sigma(\Omega) \subseteq X$.

最後に，$L^2_\sigma(\Omega)$ が X の全体を与えることを示す．$X = L^2_\sigma(\Omega) \oplus X^\perp$ とおき，$X^\perp = \{0\}$ を示せばよい．$\boldsymbol{g} \in X^\perp$ としよう．(2.25) より $\boldsymbol{g} = \nabla\phi$ （$\exists\phi \in H^1(\Omega)$；一価関数）. また $\boldsymbol{g} \in X$ より

$$\Delta\phi = 0 \ (\text{in } \Omega), \quad \boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi = 0 \ (\text{on } \partial\Omega)$$

を得る．この解は一意的に $\phi = c$（const.）. よって $\boldsymbol{g} = 0$. □

$L^2_\sigma(\Omega)$ は境界上で法線成分が 0 となる非圧縮ベクトル場の空間である．非圧縮ベクトル場については，$L^2(\Omega)$ の位相で境界値の法線成分のみが意味をもつ（Theorem 2.3 参照）. $L^2_\sigma(\Omega)$ をさらに分解する．

Lemma 2.3 (Hodge-Kodaira 分解). 調和ベクトル場の空間 $L^2_H(\Omega)$ に関して以下の関係が成り立つ：

1. $L^2_H(\Omega)$ の次元は $\nu = b_1(\Omega)$（第 *1 Betti* 数）である．
2. $L^2_\sigma(\Omega) = L^2_\Sigma(\Omega) \oplus L^2_H(\Omega)$.
3. $L^2_\Sigma(\Omega) = L^2_S(\Omega)$.

Proof. (1) $L^2_H(\Omega)$ の元をエネルギーの変分原理によって構成しよう．(2.22) のように Ω を切断して単連結の領域 $\check{\Omega}$ を導入する．$\check{\Omega}$ 上で $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$ と表されるベクトル場を考える．

$$F(\phi) = \int_{\check{\Omega}} |\nabla\phi(x)|^2 dx$$

の最小化元を，ここでは流束を規定して探す．境界 $\partial\Omega$ 上で $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi = 0$ とする．各切断面 Σ_j について，流束を

$$\int_{\Sigma_j} \boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi ds = \Phi_j \qquad (j = 1,\cdots,\nu) \tag{2.27}$$

と規定する．これを Σ_j に関する「流束条件」と呼ぼう[11]．以下，$\Phi_j = \delta_{j,k}$（$k = 1,\cdots,\nu$）としたとき，ν 個の互いに直交する 0 でない最小化元が得られることを示す．

流束条件 (2.27) は，ϕ のジャンプ $[\phi]_j$ を束縛することによって変分原理に反映できる．ここで，切断面 Σ_j におけるジャンプとは

$$[\phi]_j = \phi|_{\Sigma_j^+} - \phi|_{\Sigma_j^-}$$

と定義される．これは Σ_j 上で定数でなくてはならない．変分を計算するために，ϕ の摂動を $\tilde{\phi}$ と表そう．$[\tilde{\phi}]_j = 0$ を要する．形式的に変分を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\tilde{F}(\phi) &= \int_{\check{\Omega}} \nabla\phi\cdot\nabla\tilde{\phi}dx \\ &= \int_{\check{\Omega}} (-\Delta\phi)\tilde{\phi}dx + \sum_{j=1}^{\nu}\left[\int_{\Sigma_j^+}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi)\tilde{\phi}ds - \int_{\Sigma_j^-}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi)\tilde{\phi}ds\right]\end{aligned}$$

となる（ただし，複素関数の場合は積分の実部をとる）．$[\tilde{\phi}]_j = 0$ に注意すると，

$$\int_{\Sigma_j^+}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi)\tilde{\phi}ds - \int_{\Sigma_j^-}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi)\tilde{\phi}ds = \int_{\Sigma_j}[\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi]_j\tilde{\phi}ds \quad (j = 1,\cdots,\nu)$$

を得る．したがって，Euler 方程式は

$$\begin{cases}\Delta\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega), \\ \boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega), \\ [\phi]_j = c\delta_{j,k} \quad (c = \text{const.}),\ k = 1,\cdots,\nu), \\ [\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi]_j = 0 \quad (j = 1,\cdots,\nu)\end{cases} \tag{2.28}$$

となる．定数 c は $\Phi_k = 1$ となるように調整すればよい．(2.28) の解に対して $\boldsymbol{h}_k = \nabla\phi_k$ とおけば，明らかに $L^2_H(\Omega)$ の元となる．定数 c（あるいは Φ_k）を調

---

[11] 後でわかるように，最小化元に対して $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \Delta\phi = 0$ が成り立つ．この場合は，Gauss の定理（Stokes の公式）により，流束 Φ_j の値は切断面 Σ_j を連続に動かしても変化しない．このことを検証せよ．

整して $\|\boldsymbol{h}_k\| = 1$ となるように規格化する．直交性 $(\boldsymbol{h}_j, \boldsymbol{h}_k) = \delta_{j,k}$ が成り立つことは容易に検証できるので，演習とする．

(2) 次に $L^2_\sigma(\Omega) = L^2_\Sigma(\Omega) \oplus L^2_H(\Omega)$ を示そう．$\boldsymbol{h} \in L^2_H(\Omega)$ が全ての $\boldsymbol{u} \in L^2_\Sigma(\Omega)$ に直交することは明らかである．逆に $\boldsymbol{v} \in L^2_\sigma(\Omega)$ が全ての $\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{w} \in L^2_\Sigma(\Omega)$ に直交すると仮定すると，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v}, \nabla \times \boldsymbol{w}) = (\nabla \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \qquad (\forall \boldsymbol{u} \in L^2_\Sigma(\Omega)).$$

ここで $\boldsymbol{w}$ は $E(\Omega)$ において稠密にとれる．したがって $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$．更に $\boldsymbol{v} \in L^2_\sigma(\Omega)$ により $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$，$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = 0$．したがって $\boldsymbol{v} \in L^2_H(\Omega)$．以上より，$L^2_\sigma(\Omega) = L^2_\Sigma(\Omega) \oplus L^2_H(\Omega)$．

(3) 最後に $L^2_\Sigma(\Omega) = L^2_S(\Omega)$ を証明しよう．$L^2_S(\Omega) \supseteq L^2_\Sigma(\Omega)$ は明らか．$L^2_S(\Omega) = L^2_\Sigma(\Omega) \oplus V$ と仮定し，$\boldsymbol{f} \in V$ としよう．

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{f}, \nabla \times \boldsymbol{w}) = (\nabla \times \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}) = 0, \qquad (\forall \boldsymbol{u} \in L^2_\Sigma(\Omega)).$$

これから $\nabla \times \boldsymbol{f} = 0$, $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$，$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{f} = 0$，かつ $\boldsymbol{f}$ は流束=0 である．したがって $\boldsymbol{f} = 0$． □

以上で Theorem 2.5 の主要な部分は証明された．

Lemma 2.3 の証明（1）において構成した調和ベクトル場 $\boldsymbol{h} \in L^2_H(\Omega)$ は「多価のスカラーポテンシャル」を用いて $\boldsymbol{h} = \nabla\phi$ と表される．ϕ の多価性は，多重連結領域の切断面 Σ_j（$j = 1, \cdots, \nu$；ν は第 1 Betti 数）において課されたジャンプ条件によってもたらされている．ϕ を決定する方程式 (2.28) は，切断された単連結領域 $\check{\Omega}$ 内で与えられた楕円型偏微分方程式であるが，この解を Ω で観測すると切断面を通過するところで多価になるのだ．この多価性は，コホモロジー群と呼ばれる「本質的な調和ベクトル場」の分類を与える．

ここで本質的な調和ベクトル場といったのは，次のような意味である．第 2.1 節において議論した $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ の可解性に関する議論を思い出そう．そこでは，局所的な可解性の必要条件として $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ があることを指摘した．Theorem 2.5 を得た今では，これを境界値問題として大域的に（任意のトポロジーをもつ領域 Ω の全体で）解くための条件がわかっている．すなわち，$\boldsymbol{B} \in L^2_\Sigma(\Omega)$ であるならば，$\boldsymbol{A}$ を Coulomb ゲージ条件と同次境界条件 $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A} = 0$ を付与して決定することができる．$\boldsymbol{B} \in \mathrm{Ker(div)} = L^2_\Sigma(\Omega) \oplus L^2_H(\Omega) \oplus L^2_G(\Omega)$（系 2.1 参照）に対しては，非同次境界条件について $L^2_G(\Omega)$ の元を，0 でない流束について $L^2_H(\Omega)$ の元を足さなくてはならない（Corollary 2.2 参照）. これらはいずれも調和ベクトル場であるが，とくに $\boldsymbol{h} \in L^2_H(\Omega)$ は Ω のトポロジーに関連する項である．

ϕ の多価性が領域の切断によって与えられることは，複素平面に Riemann 切断を入れて「偏角（argument）」の多価性を表現することに似ている．複素平面の領域 Ω が多重連結であるとき，その上で定義された正則関数を考えると，その実部および虚部は「調和関数」である（Cauchy-Riemann の関係式）. Ω にあいた「穴」は正則関数の特異点であり，これが偏角の多価性を生みだす源である．正則関数 $f(z)$ と，特異点を周回する積分路 C について，

$$\mathrm{deg} f = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{df/dz}{f} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C d(\log f)$$

は整数値をとる（写像度という）. これによって，f の特異性とループ C の位相幾何学的関係が分類される.

References

1. 吉田善章，新版　応用のための関数解析 —その考え方と技法（サイエンス社，2006）.
2. G. De Rham, *Variétés Différentiables*, Hermann, Paris, 1960, p. 114.
3. K.O. Friedrichs, *Differential forms on Riemannian maniforlds*, Comm. Pure Appl. Math. **VIII** (1955), 551-590.
4. J. L. Lions and E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Vol. I, Springer-Verlag, 1972.
5. R. Temam, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, 1984.

Chapter 3
ハミルトン力学系として見た流体

流体やプラズマのマクロな運動方程式をハミルトン力学系の形式に書くことができる．もちろんこれらは偏微分方程式系（関数空間の発展方程式）であるから無限次元の力学系という意味である．まず形式論から始め，次第に厳密な意味を考えてゆく．

3.1 力学理論の基本的文法

3.1.1 運動方程式の一般形式

ここでは〈ハミルトンの運動方程式〉とよばれる運動方程式の最も基本的なクラスを考える．その一般的な形式は，状態ベクトル $u \in X$ に対してエネルギー（Hamiltonian）$H(u)$ が与えられたとき，

$$\frac{d}{dt}u = \mathscr{J}\partial_u H(u) \tag{3.1}$$

と書かれる [7, 4]．ここでは X は Hilbert 空間とし，その内積を (a,b)，ノルムを $\|a\| = (a,a)^{1/2}$ と書くことにする．$\partial_u H(u)$ は $H(u)$ の〈勾配 = gradient〉を意味する：$H(u)$ は十分滑らかな関数とし，

$$\delta_g H(u) := H(u+\varepsilon g) - H(u) = \varepsilon(\partial_u H, g) + O(\varepsilon^2) \quad (\forall g \in D(H)) \tag{3.2}$$

により $\partial_u H(u)$ を定義する．[1] $\mathscr{J}$（以下〈Poisson 作用素〉と呼ぶ）はある〈反対称線形作用素〉である（Remark 3.1 参照）：X で定義された作用素 $\mathscr{J}$ が反対称作用素であるとは

[1] 以下の議論では，しばしば「滑らかでない」関数の勾配を考えなくてはならなくなる．その場合の議論は慎重を要するが，凸性を使って一般化した勾配を定義すること [1, 7] あるいは Lipschitz 連続性を使って定義すること [2] などの工夫ができる．

$$(\mathscr{J}a,b) = -(a,\mathscr{J}b) \quad (\forall a,b \in D(\mathscr{J})) \tag{3.3}$$

が成り立つことをいう．このような $\mathscr{J}$ はベクトルをそれと直交する方向へ曲げる．実際，内積の公理より $(\mathscr{J}a,a) = (a,\mathscr{J}a)$，一方，反対称性により $(\mathscr{J}a,a) = -(a,\mathscr{J}a)$，したがって $(a,\mathscr{J}a) = 0$．

$\mathscr{J}$ と内積を用いて〈Poisson 括弧〉を

$$\{F(u),G(u)\} := (\partial_u F, \mathscr{J}\partial_u G) \tag{3.4}$$

と定義する．$u(t)$ が運動方程式 (3.1) に従って運動するとき，ある物理量（汎関数）$F(u(t))$ の時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(u(t)) &= (\partial_u F(u(t)), \partial_t u(t)) \\ &= (\partial_u F(u(t)), \mathscr{J}\partial_u H(u)) \\ &= \{F,H\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

と計算される．Poisson 括弧の反対称性から $\{H,H\} = 0$．よって方程式 (3.1) に従う運動は $H(u)$ を保存する．第 1.1.3 項でのべたように,「もの」の identity であるエネルギー $H(u)$ が保存されなくてはならない．運動方程式 (3.1) は $H(u)$ を保存する *a priori* な構造をもつのである．[2]

Remark 3.1. 一般的なハミルトン方程式 (3.1) において $\mathscr{J}$ は状態ベクトル u に依存してもかまわない．$\mathscr{J}(u)$ と $\partial_u H(u)$ は共通の u において評価されなくてはならないから，$\mathscr{J}(u)\partial_u H(u)$ は一般的に u に関して非線形作用素となる．しかし，$\mathscr{J}(u)$（あるいは $\mathscr{J}(u)\partial_u$）自体は次の意味で線形作用素である：

$$\begin{aligned} \mathscr{J}(u)(av+bw) &= a\mathscr{J}(u)v + b\mathscr{J}(u)w, \\ \mathscr{J}(u)\partial_u[aF(u)+bG(u)] &= a\mathscr{J}(u)\partial_u F(u) + b\mathscr{J}(u)\partial_u G(u). \end{aligned}$$

$v = \partial_u F(u)$ としたとき，$\mathscr{J}(u)v$ と評価するのであり，$\mathscr{J}(v)v$ ではないことに注意しよう．

具体的な例を見ておこう．

古典力学：最も簡単な反対称作用素は

$$J_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

[2] 一般に〈保存量 = constant of motion〉とは，$\{F,H\} = 0$ を満たす物理量 F のことである．普通，これは H の具体形によって決まる．しかし，どのような H に対しても，この関係を満たすような F が存在することがある．それはポアッソン括弧を定義する $\mathscr{J}$ が〈核〉をもつ場合である．そのような保存量を〈カシミール元 = Casimir element〉と呼ぶ．カシミール元と Noether チャージとの関係については [3] 参照．後の議論でこのカシミール元が重要な役割を担う．

である．ハミルトニアンが共役変数 $\boldsymbol{z} = {}^t(q,p)$ の滑らかな関数として $H(q,p)$ と与えられたとき，(3.1) は正準運動方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{z} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_q H \\ \partial_p H \end{pmatrix} = J_c \partial_{\boldsymbol{z}} H,$$

Poisson 括弧はおなじみの $\{a,b\} = (\partial_p a)(\partial_q b) - (\partial_q a)(\partial_p b)$ である．

量子力学：量子論も基本的な構造は同じである．ただし，この場合は状態空間を複素化しておく必要がある（波動関数 u の位相はゲージ理論で重要な手掛かりとなる）．量子化した Hamiltonian $\mathscr{H}(x, i\partial_x)$ に対して $H(u) = (\mathscr{H}u, u)/2$, $\mathscr{J} = -i$（これは複素線形空間で最も簡単な反対称作用素）とおくと (3.1) は Schrödinger 方程式に他ならない．

波動方程式：一般に〈波動方程式〉は，広く非線形の場合も含めて (3.1) の形式に帰着できる．多くの非線形波動方程式では $\mathscr{J}$ を状態ベクトル u に依存する作用素にする必要がある．この問題は後で解説することにして，まず波動方程式のプロトタイプ

$$\partial_t u = -\boldsymbol{V} \cdot \nabla u \tag{3.7}$$

で基本的な構造を見ておこう．ここで位相速度を表わす $\boldsymbol{V}$ は非圧縮ベクトル場（$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$）とする．$\boldsymbol{V}$ が u あるいは u の微積分に依存するとき (3.7) は非線形である $H = (u,u)/2$, $\mathscr{J} = -(\boldsymbol{V} \cdot \nabla)$ とすれば (3.7) は (3.1) の形になる．$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} u(\boldsymbol{x},t) = 0$ を仮定して，$\mathscr{J}$ が反対称であることを検証されたい．

3.1.2 運動方程式の正準形式とシンプレクティック幾何学

本章の目的は「ハミルトンの運動方程式」という概念をできるだけ拡張し，いわゆる〈非正準 = non-canonical〉という構造を許すに至らしめ，その非正準性を〈渦〉と関係づけることである．そのために，まず〈正準〉という概念を復習しておく必要があるだろう．

有限次元の力学系から始めよう．状態ベクトルを $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$ とする．[3] ハミルトンの運動方程式 (3.1) は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{z} = \mathscr{J}\partial_z H(\boldsymbol{z}) \tag{3.8}$$

と書かれる．$\mathscr{J}$ の〈正準形 = canonical form〉は $2n \times 2n$ 正則行列

$$\mathscr{J}_c := \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

[3] 幾何学的な議論を行うときは「微分可能な多様体上の局所座標を $z_1, \cdots, z_m$ とする」というように述べるべきであるが，ここではさしあたりユークリッド空間のイメージで議論を進めよう．

により与えられる（第 3.1.1 で述べた古典力学の方程式である）．正準形式に書かれるのは状態空間の次元 m は偶数 $2n$ でなくてはならないことに注意しよう．物理的には $\mathbb{R}^n$ が〈配置空間 = configuration space〉の座標であり，これと同じ次元の〈運動量空間 = momentum space〉との直積で状態空間（位相空間ともいう）が構成されるのである．以下

$$\begin{cases} q_j = z_j, \\ p_j = z_{n+j} \end{cases} \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.10}$$

と表記する．すなわち $\boldsymbol{z} = (q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ と書く．

反対称な正則行列 $\mathscr{J}_c$ がシンプレクティック幾何学の構造を定める．[4] シンプレクティック構造とは，状態空間上で定義されたシンプレクティック 2 次形式

$$\omega = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2 + \cdots + dq_n \wedge dp_n \tag{3.11}$$

のことである．これは正準 1 次形式

$$\theta = -(p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n) \tag{3.12}$$

の外微分（渦）に他ならない $(\omega = d\theta)$.

$$A^{k\ell} := \frac{\partial \theta^\ell}{\partial z_k} - \frac{\partial \theta^k}{\partial z_\ell} \quad (1 \leq k, \ell \leq m = 2n)$$

と定義すると，$A = -\mathscr{J}_c$，すなわち $\mathscr{J}_c = A^{-1}$ である．

シンプレクティック構造とハミルトン力学の関係，すなわち〈最小作用の原理〉を確認しておこう.〈作用〉とは時空間の出発点 $a = (\boldsymbol{z}_0, t_0)$ から到着点 $b = (\boldsymbol{z}_1, t_1)$ を結ぶ経路 $\boldsymbol{z}(t)$ にそってとった積分

$$S = -\int_a^b \theta + H dt = -\int_{t_0}^{t_1} \left(p_j \frac{dq_j}{dt} + H \right) dt \tag{3.13}$$

のことである．a と b を固定して $\boldsymbol{z}(t) \to \boldsymbol{z}(t) + \varepsilon \tilde{\boldsymbol{z}}(t)$ と摂動した時の変分を計算すると（部分積分をして）

$$\delta_{\tilde{z}(t)} S = -\varepsilon \int_a^b \left(A^{k\ell} \frac{dz_\ell}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z_k} \right) \tilde{z}_k dt + O(\varepsilon^2).$$

したがって Euler-Lagrange 方程式

$$A^{k\ell} \frac{dz_\ell}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_k} \quad (k = 1, \cdots, 2n) \tag{3.14}$$

を得る．これを書き直して（A^{-1} をかけて），お馴染みの〈ハミルトンの正準運動方程式〉

---

[4] シンプレクティック (symplectic) 幾何学とは，群 $Sp(n) := \{A \in GL(2n; \mathbb{R}); A^{-1} \mathscr{J}_c A = \mathscr{J}_c\}$ を G 構造とする幾何学のことである．

$$\frac{dz_\ell}{dt} = \mathscr{J}_c^{k\ell} \frac{\partial H}{\partial z_k} \quad (k = 1, \cdots, 2n) \tag{3.15}$$

を得るのである．これは (3.8) においてポアッソン行列を正準形 $\mathscr{J}_c$ としたものに他ならない．

運動方程式に「具体形」を与えたのは作用のなかで $-\int H dt$ の部分である．正準 1 次形式 θ（その渦 $\omega = d\theta$ が定義するシンプレクティック構造）は運動方程式の *a priori* な形式，すなわち幾何学的構造 $\mathscr{J}_c$ を定めているのである．

上記の道筋（シンプレクティック 2 次形式，それの元になる正準 1 次形式 → 最小作用の原理 → ハミルトンの運動方程式）を逆にたどろうとすると，すなわちハミルトンの運動方程式（必ずしも正準形式ではない）から最小作用の原理，作用を構成するシンプレクティック 2 次形式を構築しようとすると，ポアッソン行列 $\mathscr{J}$ の逆行列が定まらなくてはならないこと，つまり $\mathscr{J}$ が正則行列であることが「本質的な曲がり角」であることがわかる．

以下の議論で中心的なテーマとなるのは，まさにこの点である．$\mathscr{J}$ が正則行列でない場合，すなわち $\text{Rank}(\mathscr{J}) < m$ であるようなハミルトン力学系を〈非正準〉であるという．

3.1.3 非正準ハミルトン力学系

引き続き有限次元で議論を進める．一般に正準形式ではないポアッソン行列が $\mathscr{J}(\boldsymbol{z})$ のように $\boldsymbol{z}$ に依存する（正則）関数として与えられるとする．ただし $\mathscr{J}(\boldsymbol{z})$ は反対称行列であり，これで定義されるポアッソン括弧が Jacobi の等式

$$\{\{a,b\},c\} + \{\{b,c\},a\} + \{\{c,a\},b\} = 0 \tag{3.16}$$

を満たすとする．

ここでは非正準な $\mathscr{J}(\boldsymbol{z})$ を考える．すなわち $\text{Ker}(\mathscr{J}(\boldsymbol{z}))$ が自明でない元をもつとする．もし

$$\mathscr{J}(\boldsymbol{z}) \partial_{\boldsymbol{z}} C(\boldsymbol{z}) = 0 \tag{3.17}$$

を満たす $C(\boldsymbol{z})$ で自明でない（定数でない）ものがあるならば，$C(\boldsymbol{z})$ を〈カシミール元 = Casimir element〉と呼ぶ．もちろん $\partial_{\boldsymbol{z}} C(\boldsymbol{z}) \in \text{Ker}(\mathscr{J}(\boldsymbol{z}))$ であるが，$\boldsymbol{v} \in \text{Ker}(\mathscr{J}(\boldsymbol{z}))$ に対して，その「積分」であるカシミール元 $C(\boldsymbol{z})$ があって $\boldsymbol{v} = \partial_{\boldsymbol{z}} C(\boldsymbol{z})$ と書けるとは限らないことに注意しよう．次の基本的な定理が知られている．

Theorem 3.1 (Lie-Darboux). 状態空間の次元は $m = 2n$ とし，$Rank(\mathscr{J}) = 2\nu < m$ であるとする（ν は $\boldsymbol{z}$ に依らず一定とする）．このとき *(3.17)* を満たす $\mu = 2(n-\nu)$ 個の独立なカシミール元 $C_1(\boldsymbol{z}), C_2(\boldsymbol{z}), \cdots, C_\mu(\boldsymbol{z})$ が存在する．これらを μ 個の座標とし，さらに適当な座標変換を行って新たな状態変数を $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \cdots, \zeta_{2\nu}, C_{2\nu+1}, \cdots, C_{2\nu+\mu})$ として，$\mathscr{J}$ を標準形

$$
\mathscr{J}' = \left(\begin{array}{cc|c} 0_\nu & I_\nu & \\ -I_\nu & 0_\nu & \\ \hline & & 0_\mu \end{array}\right) \tag{3.18}
$$

に変換できる．

カシミール元は「保存量」である．実際，(3.5) に代入すると

$$
\frac{d}{dt}C = \{C, H\} = 0.
$$

これはどのようなハミルトニアン H に対しても成り立つ．カシミール元はポアッソン括弧の〈位相欠陥〉すなわちポアッソン行列の核によって定まる保存量だからである．普通の保存量（とくに正準ハミルトン力学系がもつ保存量）はハミルトニアン H の対称性によって生じるものであることと対比しよう．

カシミール元 $C(z)$ が保存量であるという意味は，運動が $C(z)$ の等高面（level set）の上に束縛されているということである．この等高面を〈葉 = leaf〉と考えると，カシミール元によって状態空間に〈葉層構造 = foliation〉が与えられるということができる．

Remark 3.2 (特異カシミール元). Theorem 3.1 の条件文にあうように，一般的な位相欠陥 $\mathrm{Ker}(\mathscr{J})$ が葉層構造を定めるわけではない．次元 m と μ が偶数でなくてはならないし，μ が z によらない定数でなくてはならない．とくに $\mathrm{Rank}(\mathscr{J}(z))$ が z の関数として変化する場合は興味深い．たとえば簡単のために $m=1$ として $z_1 = x$ と書き，$\mathscr{J} = ix$ $(x \in \mathbb{R})$ を考えてみよう．$x=0$ において $\mathrm{Rank}(\mathscr{J})$ は 0 に落ちる．$x=0$ は微分方程式 $ix\partial_x C(x) = 0$ の「特異点」であり，超函数解 $C(x) = Y(x)$ (Heaviside のステップ関数）を得る．

D-加群の言葉で書くと，線形偏微分作用素 $\mathscr{P} := \mathscr{J}\partial_z$ に対して $\mathrm{Ker}(\mathscr{P}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathrm{Coker}(\mathscr{P}), F)$ である（$\mathscr{D}$ は偏微分作用素の環，F は $\mathscr{P}$ が作用する関数空間，そして D-加群 $\mathrm{Coker}(\mathscr{P}) = \mathscr{D}/\mathscr{D}\mathscr{P}$ に対応する偏微分方程式が $\mathscr{P}C(\omega) = 0$ ということになる．

3.1.4 正準化

さらに有限次元で話を進める．非正準ポアッソン行列 $\mathscr{J}_{nc}$ が (3.18) のような標準形

$$
\mathscr{J}_{nc} = \begin{pmatrix} \mathscr{J}_c & \\ & 0_\mu \end{pmatrix} \tag{3.19}
$$

で与えられたとしよう．$\mathscr{J}_c$ は $2\nu \times 2\nu$ の正準ポアッソン行列である．ここでは $\dim(\mathrm{Ker}(\mathscr{J})) = \mu$ は偶数でなくてもよい（したがって状態空間の次元 $m = 2\nu + \mu$ も偶数とは限らない）．この系を「正準化」するには２つの方法がある．

縮減法：標準形 (3.19) の形で核が分離されていれば，核（0 固有値）に属する部分空間を削除して $\mathscr{J}_c$ の部分だけを残すことができる．これを〈最大正準

縮減〉と呼ぼう．縮減された力学系とは，束縛されている（保存量である）変数を分離して，実際に運動が起こる〈葉〉の上の運動方程式を抽出したものである．

拡張法：状態空間を核の次元 μ だけ拡張し $\tilde{z} := (z_1, \cdots, z_m, \vartheta_1, \cdots, \vartheta_\mu)$ とおく．$\mathscr{J}_c$ を $2(\nu+\mu) \times 2(\nu+\mu)$ の行列

$$\widetilde{\mathscr{J}} = \left(\begin{array}{c:cc} \mathscr{J}_c & & \\ \hdashline & 0_\mu & I_\mu \\ & -I_\mu & 0_\mu \end{array}\right) \tag{3.20}$$

に拡張する．これは変数を並べ替え $\tilde{z}' := (z_1, \cdots, z_{2\nu}, \vartheta_1, z_{2\nu+1} \cdots, \vartheta_\mu, z_{2\nu+\mu})$ とすると正準形式 (3.9) に帰着できる．(3.20) を〈最小正準拡張〉と呼ぼう．この拡張された正準力学系でカシミール元（$C_1 = z_{2\nu+1}, \cdots, C_\mu = z_{2\nu+\mu}$）はどういう意味をもつのだろうか．カシミール元はポアッソン行列の位相欠陥（核）によって生まれる保存量であることは既に指摘したところである．拡張した正準力学系でもこれらは保存量であるのだが，正準力学系ではカシミール元ではない．これらの保存は「ハミルトニアンの対称性」に翻訳されているのだ．実際，あたらしく付け加えた変数 $\vartheta_1, \cdots, \vartheta_\mu$ はハミルトニアンには元々含まれていないので，これらに共役な $z_{2\nu+1}, \cdots, z_{2\nu+\mu}$ は拡張した力学系の保存量になるのである（$dz_{2\nu+j}/dt = -\partial H/\partial \vartheta_j = 0$）．

以上２つの正準化が成功するのは，非正準性（ポアッソン行列の核）が「積分され」カシミール元として表現されているからである．既に注意したように，一般の非正準系は（Rank($\mathscr{J}(z)$) が偶数とは限らず，さらに一定とは限らない）．不足次元（核の次元）の数だけカシミール元を見つけることができるとは限らないので，このような正準化ができるとは限らない．しかし，いろいろな変数変換などで非正準系を縮減した，あるいは拡張した正準系を定式化することができる [4]．そうした正準化系ともとの非正準系との「関係」を明示することは一般的には可能でない．

ここまで有限次元の力学系を中心に議論してきたが，私たちの関心である〈渦〉の問題は，無限次元の世界に存在する．次節では，無限次元のハミルトン力学系をどのように定式化するかについて考える．

3.2 流体・プラズマのハミルトン力学

3.2.1 素朴な定式化

まず流体やプラズマの運動方程式を素朴なかたちで紹介しよう．

オイラー方程式・渦方程式: 非圧縮・一定密度・非粘性の運動方程式であるオイラー方程式が渦に係る最も簡単な例である：Ω は $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ or 3) の領域で，その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかであるとする．Ω 内で定義された流体速度を $\boldsymbol{V}$

（n 次元ベクトル関数），圧力を p（スカラー関数）と書くとき（質量密度は一定であるとし 1 に規格化する）

$$\partial_t \boldsymbol{V} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} = -\nabla p \ \ (\text{in } \Omega), \tag{3.21}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0 \ \ (\text{in } \Omega), \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V} = 0 \ \ (\text{on } \partial\Omega). \tag{3.23}$$

ベクトル公式をつかって運動方程式 (3.21) を

$$\partial_t \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\omega} = -\nabla\tilde{p}, \tag{3.24}$$

と書き変えることができる．ここで $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{V}$ は渦度，$\tilde{p} = p + u^2/2$ はエネルギー密度を表わすスカラー関数である．(3.24) の両辺の curl をとって〈渦方程式〉を得る：

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} - \nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\omega}) = 0. \tag{3.25}$$

圧縮性流体: 非圧縮モデルでは圧力 p は流れ $\boldsymbol{V}$ が非圧縮条件 (3.22) と境界条件 (3.23) を満たすように決まるのであるが，物理的には流体の密度やその他の物理量，および状態方程式によって決まる．[5]まず質量の保存則は，密度を ρ（質量密度を $\rho_m = m\rho$）と書くとき，

$$\partial_t \rho + \nabla\cdot(\boldsymbol{V}\rho) = 0 \tag{3.26}$$

と表わされる．[6] 変化する密度を考慮に入れて，運動方程式 (3.21) を精密化すると

$$\partial_t \boldsymbol{V} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} = -(m\rho)^{-1}\nabla p \ \ (\text{in } \Omega). \tag{3.27}$$

〈順圧 = barotropic〉の状態方程式 $p = p(\rho)$ が成り立つとすると，(3.26), (3.27) に境界条件 (3.23) を与えて方程式が閉じる．また右辺はモル・エンタルピー h を用いて $(m\rho)^{-1}\nabla p = \nabla h$ と書くことができる．したがって圧力項は完全微分であり，渦方程式 (3.25) はそのまま成り立つ．

もう少し一般化して，エントロピー σ を用いて $p = p(\rho, \sigma)$ と書くことができる場合を考えることもある．理想流体では σ は流体運動に沿って保存されるので

$$\partial_t \sigma + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\sigma = 0 \tag{3.28}$$

によって支配される．[7] (3.26), (3.27), (3.28)- に境界条件 (3.23) を与えて方程式が閉じる．運動方程式 (3.27) の右辺は一般的に完全微分ではなく，渦方程式 (3.25) は

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} - \nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\omega}) = m^{-1}\nabla T\times\nabla\sigma \tag{3.29}$$

---

[5] 流体の圧縮運動によって伝播する音速が無限大の極限を考えると非圧縮モデルに相当する．したがって，音波が伝播する時間スケールよりゆっくりした流体運動を考える場合に非圧縮モデルがよくつかわれる．

[6] ρ は n 次微分形式であり，Lie 微分 $\mathscr{L}_V = i_V d + d i_V$ を用いて $\partial_t \rho + \mathscr{L}_V \rho = 0$ という意味である．

[7] σ は 0 次微分形式であり，Lie 微分 $\mathscr{L}_V$ を用いて $\partial_t \sigma + \mathscr{L}_V \sigma = 0$ という意味である．

と修正される（T は温度を表わす）．右辺が傾圧効果を表わす．

プラズマ: 流体を構成する分子が電離して，流体にマクロな電磁力が作用するようになると（また流体の運動によって電磁場が生成・変動するようになると），中性流体では縮退していた様々な物理現象が生起する．

プラズマの運動方程式を書くためには，速度 $\boldsymbol{V}$ を正準運動量 $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{V} + e\boldsymbol{A}$ に置き換え，またエンタルピーに静電エネルギーを加えればよい．順圧状態方程式を仮定するならば，$\Phi = mV^2/2 + h + e\phi$ とおいて

$$\partial_t \boldsymbol{P} - \boldsymbol{V} \times (\nabla \times \boldsymbol{P}) = -\nabla \Phi. \tag{3.30}$$

これと質量保存則 (3.26)，エントロピー保存則 (3.28)，境界条件 (3.23) を連立する．さらに，電磁場ポテンシャル $(\phi, \boldsymbol{A})$ を決めるためにカレント $(e\rho, e\rho\boldsymbol{V})$ を生成項とする Maxwell 方程式が結合する．

一般にプラズマは複数種の粒子集団で構成される（電子と幾種かのイオン）．それぞれに $m, e, \rho, \boldsymbol{V}, p$ などを定義して，それらを総合しなくてはならない．

電磁流体: 最後に (MagnetoHydroDynamics) MHD モデルを紹介しておこう．これはプラズマの簡略モデルとしてもしばしば用いられる．

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V} \times (\nabla \times \boldsymbol{V}) = -\nabla(\Phi/m) + (\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}/(m\rho\mu_0), \\ \partial_t \boldsymbol{B} = \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}). \end{cases} \tag{3.31}$$

3.2.2 形式的なハミルトン形式

前項で与えた流体・プラズマの運動方程式について，それをハミルトンの運動方程式 (3.1) の形式に書いてみよう．ハミルトニアン（エネルギー）とポアッソン作用素を定式化すればよい．

ハミルトン形式は，いわば物理の根本的形式であるから，非圧縮モデルのような「人工的」なモデルを扱うには少し技巧が必要になる．むしろ一般的な問題設定から始める方が単純である．

圧縮性流体・プラズマ: プラズマの運動方程式 (3.26)-(3.30)——ここでは順圧を仮定する——の場合は，状態ベクトルを $\boldsymbol{u} = {}^t(\rho, \boldsymbol{P})$ とおき（とりあえず領域 Ω は全空間 $\mathbb{R}^3$ として，境界条件は与えないことにしよう），

$$H = \int \left[\frac{(\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} + e\phi + \mathscr{E}(\rho) \right] \rho\, d^3x \tag{3.32}$$

$$\mathscr{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla\cdot \\ -\nabla & -\rho^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{P})\times \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

とすればよい．ただし $\mathscr{E}$ はモルあたりの熱エネルギーであり，圧力 p，モルエンタルピー h と

$$\frac{d(\rho\mathscr{E})}{d\rho} = h = \mathscr{E} + \frac{p}{\rho}$$

の関係をみたす．

この $\mathscr{J}$ が反対称であること，ハミルトン方程式 (3.1) が (3.26)-(3.30) を与えること確認されたい．なお，電磁場 $(\phi, \boldsymbol{A})$ を 0 とすれば，これはそのまま中性流体の方程式である．[8]

ＭＨＤモデル: 状態変数を $\boldsymbol{u} = {}^t(\rho, m\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B})$ とし，[9]

$$H = \int \left\{ \left[\frac{mV^2}{2} + \mathscr{E}(\rho) \right] \rho + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\} d^3x. \tag{3.34}$$

$$\mathscr{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla\cdot & 0 \\ -\nabla & -(m/\rho)(\nabla\times\boldsymbol{V})\times & (\nabla\times\circ)\times\boldsymbol{B}/\rho \\ 0 & \nabla\times[\circ\times\boldsymbol{B}/\rho] & 0 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

とおけばよい．ハミルトン方程式 (3.1) が MHD 方程式 (3.31) になることを確認されたい．

非圧縮・一定密度モデル: 最後に非圧縮理想流体のオイラー方程式 (3.21)-(3.22)-(3.23) に戻ろう（プラズマやＭＨＤの非圧縮モデルも同様に定式化できる）．非圧縮性を仮定すると，∇p は非圧縮条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0$ をみたすための「修正項」に仕立てる必要がある．これは〈射影作用素〉として定式化される．ベクトル場 $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$ を非圧縮ベクトル場 $\boldsymbol{u}_\sigma \in L^2_\sigma(\Omega) = L^2_\Sigma(\Omega) \oplus L^2_H(\Omega)$ へ射影することを $\boldsymbol{u}_\sigma = \mathscr{P}\boldsymbol{u}$ と書く．具体的には，$\Delta\vartheta = \nabla\cdot\boldsymbol{u}$ をみたす ϑ を用いて（ノイマン境界条件 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla\vartheta = 0$ を与えれば ϑ は一意的に決まる），$\boldsymbol{u}_\sigma = \mathscr{P}\boldsymbol{u} := \boldsymbol{u} - \nabla\vartheta$ とすればよい．非圧縮の $\boldsymbol{V}$ に対して $\mathscr{P}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}$ であること，また任意のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ に対して $\nabla\times(\mathscr{P}\boldsymbol{u}) = \nabla\times\boldsymbol{u}$ であることに注意しつつ，運動量の式 (3.21) に $\mathscr{P}$ を作用させると ∇p の項が消え，[10]

$$\partial_t \boldsymbol{V} = -\mathscr{P}(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V} \tag{3.36}$$

と書くことができる．これはヒルベルト空間 $L^2_\sigma(\Omega)$ の上の発展方程式と考えることができる．エネルギーとポアッソン作用素は

---

[8] プラズマの場合，電磁場の 4 元ベクトル $(\phi, \boldsymbol{A}$ はプラズマ自身の運動と結合して変化する．したがって，これを支配する Maxwell 方程式と連立した大きな問題を解く必要がある．その Lagrangian については [8] 参照．

[9] 有限な領域を考えるときはこれらの変数に境界条件をあたえなくてはならない．$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V} = 0$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B} = 0$（完全導体壁の条件）とするのが普通である．領域が多重連結である場合には，$\boldsymbol{B}$ の境界値だけではなく，磁束保存の条件を満たすように，$\boldsymbol{B}$ に含まれる調和ベクトル成分（真空磁場）を固定しなくてはならない．すなわち $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_\Sigma + \boldsymbol{B}_H$ $(\boldsymbol{B}_\Sigma \in L^2_\Sigma(\Omega), \boldsymbol{B}_H \in L^2_H(\Omega))$ と直交分解したとき (Theorem 2.5)，$\boldsymbol{B}_H$ を固定し，状態ベクトルは $u = (\rho, m\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}_\Sigma)$ とおかなくてはならない．Remark 3.3 も参照のこと．

[10] ρ は力学変数ではなくなり，p (あるいは h) との関数関係を失う．よってハミルトニアンから $\mathscr{E}(\rho)$ が脱落する)．代わりに $\rho^{-1} \to \mathscr{P}$ と置き換える．

$$H = \int \left(\frac{V^2}{2}\right) d^3x. \tag{3.37}$$

$$\mathscr{J} = -\mathscr{P}(\nabla\times\boldsymbol{V})\times \tag{3.38}$$

である．

3.2.3 カシミール元

非線形波動方程式や流体・プラズマの例をみると，ハミルトニアンはむしろ自明（エネルギーの単純な表現）であり，方程式の本質的な構造はポアッソン括弧の側に押しつけられている．よって，解析の対象は主に $\mathscr{J}$ となる．

(3.5) より，物理量（汎関数）$F(u)$ がハミルトニアン $H(u)$ と交換する，すなわち $\{H,F\}=0$ であるとき，$F(u(t))$ は保存する．普通，この保存条件はハミルトニアン $H(u)$ に依存して決まるのだが，$H(u)$ に依存しない保存量，すなわち

$$\{G(u),C(u)\}=0 \quad (\forall G(u)) \tag{3.39}$$

をみたす $C(u)$（$\neq$ 定数）が存在するとき，これを〈カシミール元 = Casimir element〉（あるいは中心 = center）という．$C(u)$ を専ら決定づけているのはポアッソン括弧 (3.4) の構造を決める反対称作用素 $\mathscr{J}$ である．実際，(3.39) は

$$\mathscr{J}\partial_u C(u)=0 \tag{3.40}$$

と等価である．(3.40) は

$$\partial_u C(u)\in \mathrm{Ker}(\mathscr{J})=\{v;\ \mathscr{J}v=0\}$$

を意味する．$v\in\mathrm{Ker}(\mathscr{J})$ をカーネル元と呼ぶことにしよう．あるカーネル元 v を見つけたとしても $v=\partial_u C(u)$ と書ける「原始関数」$C(u)$ があるとは限らない．

運動 $\partial_t u$ は $\mathrm{Ker}(\mathscr{J})$ に直交する多様体上に制限される．実際，運動方程式 (3.1) より，$\partial_t u$ は $\mathscr{J}$ の値域に含まれなくてはならない．$a=\mathscr{J}b$（$\exists b$）と書けるとき，$\mathscr{J}$ が反対称であることから，あらゆる $v\in\mathrm{Ker}(\mathscr{J})$ に対して $(a,v)=(\mathscr{J}b,v)=-(b,\mathscr{J}v)=0$．よって $\mathscr{J}$ の値域は $\mathrm{Ker}(\mathscr{J})$ に直交する．こうしてみると，カシミール元とは，運動方程式の〈位相欠陥〉つまり軌道が進入できない隙間を〈葉層構造〉として表現する量だといえる．運動は汎関数 $C(u)$ のレベルセット上を経巡る．$C(u)$ は運動の積分曲面（一般に無限次元空間にはめこまれている）を与えるのだ．しかし一般には隙間は「可積分」ではない——$\mathrm{Ker}(\mathscr{J})$ は「層構造」という秩序＝保存量による表現をもつとは限らないのである．ただし，有限次元の場合には Lie-Darboux の定理 3.1 があったことを思い出そう．

具体的な例でカシミール元とはどのようなものかをみよう．波動方程式 (3.7) の場合，カシミール元は〈特性曲面〉に関連して定められる．ここで特性曲面とはベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の積分曲面のことであり，物理の言葉では不連続面といっても

よい．ある関数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ があって，$\boldsymbol{V}\cdot\nabla\varphi=0$ をみたすとしよう．このとき $\varphi(\boldsymbol{x})=c$（定数）で与えられる曲面（$\varphi$ のレベルセット）が特性曲面である．定義により $\boldsymbol{V}$ は特性曲面に接する（つまり $\boldsymbol{V}$ の流線は特性面上にのっている）．このような $\varphi(\boldsymbol{x})$ がみつかると，任意の関数 f について $f(\varphi)$ は波動方程式 (3.7) の定常解である．つまり $\mathrm{Ker}(\mathscr{J})=\{f(\varphi)\}$.[11] f は不連続でもよい——$\boldsymbol{V}\cdot\nabla f(\varphi)=0$ が（超関数の意味で）なりたつ．よって特性曲面は不連続面を与えるのである（今の場合，定常解をみているので不連続面は定在ショックを表わす）．$\boldsymbol{V}$ が u と無関係なベクトル場であるなら（すなわち (3.7) が線形方程式である場合），カシミール元は $f(\varphi)\in\mathrm{Ker}(\mathscr{J})$ を「積分」して $\int uf(\varphi)dx$ と与えられる．

前項で定式化した流体・プラズマのハミルトン方程式も全て非正準であり，カシミール元をもつ．圧縮性流体・プラズマのポアッソン作用素 (3.33) の場合，

$$C_1=\int\rho d^3x \tag{3.41}$$

$$C_2=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{P}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{P})d^3x \tag{3.42}$$

という２つのカシミール元がみつかる．[12]C_1 は全粒子数を表わす．C_2 はヘリシティーと呼ばれる積分量である．これは〈渦〉を表現するものであることに注目しよう．ただし C_2 を定義するとき，$\mathscr{J}$ の定義域を $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}=0$ に制限する必要がある．

非圧縮理想流体のポアッソン作用素 (3.38) の場合もヘリシティー

$$C=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{V}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V})d^3x \tag{3.43}$$

がカシミール元である．

ＭＨＤ方程式については

$$C_1=\int\rho d^3x \tag{3.44}$$

$$C_2=\int\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B}d^3x \tag{3.45}$$

$$C_3=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}d^3x \tag{3.46}$$

というカシミール元がある．C_2 をクロス・ヘリシティー，C_3 を磁気ヘリシティーと呼ぶ．

Remark 3.3. 領域 Ω が多重連結である場合，状態変数の中の $\boldsymbol{B}$ に含まれる調和ベクトル成分（真空磁場という）を固定しなくてはならない（完全導体境界条件のもとで磁束が保存することによる）．すなわち $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_\Sigma+\boldsymbol{B}_H$ $(\boldsymbol{B}_\Sigma\in L^2_\Sigma(\Omega)$,

---

[11] 厳密にいうと，$\boldsymbol{V}=0$ の領域があると，そこで u は自由になる．よって $\mathrm{Ker}(\mathscr{J})$ は，一つの φ から生成される $\{f(\varphi)\}$ では尽くされない．このような $\mathrm{Ker}(\mathscr{J})$ を「積分」してカシミール元で表わすことは難しい．

[12] これ以外にないということを証明することは一般にはできない．あとで議論するように，対称性がある場合にはたくさんのカシミール元が生まれる．

$\boldsymbol{B}_H \in L^2_H(\Omega)$) と直交分解したとき（Theorem 2.5），$\boldsymbol{B}_H$ を固定し，状態ベクトルは $u = (\rho, m\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}_\Sigma)$ である．これに応じて，磁気ヘリシティーを定義しなくてはならない．$(0,0,\boldsymbol{A}) \in \mathrm{Ker}(\mathscr{J})$ を「積分」したものとして C_3 を定義したいのであるが，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ には $\boldsymbol{B}_H$ のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}_H$ も含まなくてはならない（ポアッソン作用素 $\mathscr{J}$ に含まれる $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{B}_\Sigma + \boldsymbol{B}_H$ と与えなくてはならないから）．$\boldsymbol{A}_H$ を $L^2_\Sigma(\Omega)$ の中にとることができる [5]．また，自己共役な curl 作用素 $\mathscr{S} : L^2_\Sigma(\Omega) \to L^2_\Sigma(\Omega)$ をもちいて，$\boldsymbol{B}_\Sigma$ のベクトルポテンシャルを $\mathscr{S}^{-1}\boldsymbol{B}_\Sigma$ と書くことができる [5]．これらを用いて

$$C_3 = (\boldsymbol{A}_H, \boldsymbol{B}_\Sigma) + \frac{1}{2}(\mathscr{S}^{-1}\boldsymbol{B}_\Sigma, \boldsymbol{B}_\Sigma) \tag{3.47}$$

と定義する．これはゲージ不変である．

$$\partial_{\boldsymbol{B}_\Sigma} C_3 = \boldsymbol{A}_H + \mathscr{S}^{-1}\boldsymbol{B}_\Sigma =: \boldsymbol{A}$$

を得る．

3.3 エネルギー・カシミール関数

3.3.1 カシミール元と渦構造

保存量のなかでもカシミール元がとりわけ重要であるのは，次の理由による．運動方程式を決定付けるハミルトニアンを次のように変換してみよう：

$$H_{\boldsymbol{\mu}}(u) = H(u) - \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j C_j(u). \tag{3.48}$$

ここに $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_\nu)$，$\mu_j$ は任意の実定数，$C_j(u)$ はカシミール元（$j = 1, \cdots, \nu$）である．(3.40) により，ハミルトン方程式 (3.1) はこの変換に対して不変である:

$$\partial_t u = \mathscr{J}\partial_u H_{\boldsymbol{\mu}}(u) = \mathscr{J}\partial_u H(u). \tag{3.49}$$

したがって，ハミルトニアン $H(u)$ を $H_{\boldsymbol{\mu}}(u)$ で置き換えても，運動は変わらない．エネルギーとカシミール元で構成された $H_{\boldsymbol{\mu}}(u)$ を〈エネルギー・カシミール関数〉と呼ぶことにしよう．

変換 (3.48) によって，平衡点は多様化する．運動方程式 (3.1) の平衡点は右辺を 0 とする u であるが，その最も簡単なものはハミルトニアン $H(u)$ の極値点（ふつうは極小点）すなわち $\partial_u H(u) = 0$ となる点である．しかし，ほとんどの場合それは自明な解である（前項のいろいろな例をみよ）．しかし，カシミール元で変換されたハミルトニアンすなわちエネルギー・カシミール関数 $H_{\boldsymbol{\mu}}(u)$ の極値点は様々な〈構造〉をもつ．平衡条件＝極値条件 $\partial_u H_{\boldsymbol{\mu}}(u)$ は「微積分方程式」となり，それはパラメタ $\boldsymbol{\mu}$ を「固有値」として含む（$\boldsymbol{\mu} = 0$ の解は「基底状態」を表わす）．〈構造〉とは微積分方程式の固有関数であるといってよい．

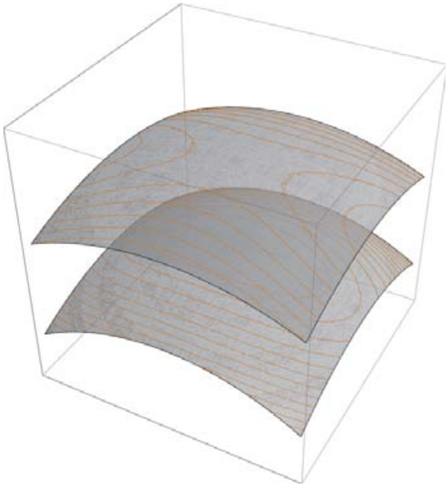

Fig. 3.1 カシミール元（ヘリシティー）の葉層と葉の上のエネルギー分布．平衡点（エネルギーが極値を取る点）はヘリシティーの値が変わるに応じて変化する．O-点で示された平衡点は安定，X-点で示された平衡点は不安定になりえる．

MHD モデルの場合について具体的に計算してみよう．エネルギー (3.34) とカシミール元 (3.44), (3.45), (3.47) をもちいて平衡点

$$\partial_u \left(H(u) - \sum_{j=1}^{3} \mu_j C_j(u) \right) = 0, \tag{3.50}$$

を計算する．Euler-Lagrange 方程式は

$$V^2/2 + h - \mu_1 = 0, \tag{3.51}$$

$$\rho \boldsymbol{V} - \mu_2 \boldsymbol{B} = 0, \tag{3.52}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_3 \boldsymbol{B} - \mu_2 \nabla \times \boldsymbol{V} = 0, \tag{3.53}$$

ただし，(3.53) は curl を作用した結果である．

簡単のために $\rho = 1, \boldsymbol{V} = 0$ (したがって $\mu_2 = 0$) の場合を考えよう．$\mu_3 = \mu$ と書くと，

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \mu \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.54}$$

を得る．これを Beltrami 方程式という．すなわち〈渦〉の固有関数（$\boldsymbol{B}_\mu$ と書く）が与えられるのである．これはヘリシティー C_3 のレベルセット（ヘリシティー葉層）上でエネルギーノルム $\|\boldsymbol{B}\|$ が極値をとる点である (Fig. 3.1).

3.3.2 安定性

エネルギー・カシミール関数 $H_\mu(u)$ の極値点として与えられる平衡点 u_μ（ここでは Beltrami 平衡と呼ぶ）の近傍で運動方程式を線形化して安定性を調べよう．Beltrami 平衡の安定性は，一般の平衡にはない，単純さをもつ．抽象的な運動方程式 (3.1) をにおいてハミルトニアン $H(u)$ をエネルギー・カシミール関数 $H_\mu(u)$ に変換しても運動は変わらないのであった：

$$\frac{d}{dt}u = \mathscr{J}(u)\partial_u H_\mu(u). \tag{3.55}$$

Beltrami 平衡点 u_μ の近傍で $u = u_\mu + \varepsilon\tilde{u}$ と摂動する．自己共役作用素 $\mathscr{H}$ があって，

$$H_\mu(u_\mu + \varepsilon\tilde{u}) = H_\mu(u_\mu) + \frac{\varepsilon}{2}(\mathscr{H}_\mu\tilde{u},\tilde{u}) + O(\varepsilon^2)$$

と書くことができる．$\mathscr{J}(u)$ の摂動を形式的に $\widetilde{\mathscr{J}}$ と書くと，線形化方程式は

$$\frac{d}{dt}\tilde{u} = \mathscr{J}(u_\mu)\partial_u\frac{1}{2}(\mathscr{H}_\mu\tilde{u},\tilde{u}) + \widetilde{\mathscr{J}}\partial_u H_\mu(u_\mu). \tag{3.56}$$

ここで $\partial_u H_\mu(u_\mu) = 0$ に注意すると，右辺の第 2 項は 0 である．第 1 項の対称 2 次形式の勾配を計算すると $\partial_u(\mathscr{H}_\mu\tilde{u},\tilde{u})/2 = \mathscr{H}\tilde{u}$. したがって (3.56) は

$$\frac{d}{dt}\tilde{u} = \mathscr{J}(u_\mu)\mathscr{H}_\mu\tilde{u} \tag{3.57}$$

に帰着する．Poisson 作用素は（$\tilde{u}$ に依存しない）反対称作用素であるから汎関数 $(\mathscr{H}_\mu\tilde{u},\tilde{u})/2$ は保存量である．もしこれが〈強圧性 = coercivity〉をもつなら，すなわち $c > 0$ があって，

$$\|\tilde{u}\|^2 \le c(\mathscr{H}_\mu\tilde{u},\tilde{u}) \tag{3.58}$$

が成立つならば，Beltrami 平衡は安定である．

私たちは，平衡点をエネルギー・カシミール関数 $H_{\boldsymbol{\mu}}(u)$ の極値点として特徴づけているのだが，この汎関数が凸汎関数であるときは，平衡点は極小点である（厳密にいうと〈強圧性〉を要する [7]）．平衡点の近傍で運動はエネルギー・カシミール関数＝一定という多様体の上に束縛されているのだが，その多様体は極小点を取り囲む閉曲面であるはずだ．したがって，凸汎関数の極小点として与えられる平衡は「安定」である [7, 6]．つまり，エネルギー・カシミール関数の凸性がわかると，その変分原理から「安定な平衡点」がみつかるのである．

References

1. H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert* (North-Holland, 1973).
2. F. H. Clarke, Trans. Amer. Math. Soc. **205**, 247 (1975).
3. Y. Fukumoto, Topologica **1**, 003 (2007); [DOI: 10.3731/topologica.1.003].
4. P. J. Morrison and J. M. Greene, Phys. Rev. Lett. **45**, 790 (1980); P. J. Morrison, Rev. Mod. Phys. **70**, 467 (1998).
5. Z. Yoshida and Y. Giga, Math. Z. **204**, 235 (1990).
6. Z. Yoshida *et al*., J. Math. Phys. **44**, 2168 (2003).
7. 吉田善章，新版　応用のための関数解析 ―その考え方と技法（サイエンス社，2006）.
8. Z. Yoshida and S. M. Mahajan, Plasma Phys. Control. Fusion **54**, 014003 (2012).

Chapter 4
特異的カシミール元

前章では，エネルギー・カシミール関数 $H_\mu(u)$ の極値点を勾配＝0 の点として形式的に議論したが，この「微分係数」の計算は数学的には問題がある．関数空間＝無限次元線形空間においては，微分係数を安易に考えてはならない．エネルギー・カシミール関数の概念は常微分方程式の微分幾何学的方法による研究で開発された概念であるが [1]，これを偏微分方程式（無限次元の常微分方程式）の理論に移転するときに，まだいろいろ荒っぽいところがある．ハミルトニアン＝エネルギーは滑らかな汎関数として定義されるべきであり, (ハミルトニアンが空間の「位相」を定めているという思想に基づくなら，ノルムはハミルトニアンと等価であるべきである)，したがってその微分係数はいわゆるフレッシェ微分によって定義できる．しかし，既に述べたように，カシミール元は微積分作用素（とくに curl あるいは curl^{-1}）を含むというのが重要なポイントであり，微分作用素を含むときは不連続な汎関数となる．その微分係数という概念は一般には難しいが，凸性があるならば「変分法」によって「弱い意味の微分」を定義することが可能である[1]．

本章では，最も単純な非圧縮 2 次元理想流体のハミルトン形式を例にとり，無限次元状態空間におけるカシミール元の問題を，特異点の視点から議論する（[12] 参照）．

4.1 数学的な定式化

非圧縮・一定密度・非粘性の運動方程式であるオイラー方程式を例として議論する：

$$\partial_t \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \tilde{p} \ \ (\text{in } \Omega), \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \ \ (\text{in } \Omega), \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{V} = 0 \ \ (\text{on } \partial\Omega). \tag{4.3}$$

[1] 厳密にいうと，下半連続な凸汎関数であれば〈劣微分〉という（一般に多価の）微分係数が定義できる [2, 11].

(4.1) の両辺の curl をとったものが〈渦方程式〉である：

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} - \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}) = 0\,. \tag{4.4}$$

ここでは，領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ の有界領域で，その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らか ($C^{2+\varepsilon}$-class) であるとする．さらに，簡単のため，Ω は単連結領域とする．[2]任意のベクトル場 $\boldsymbol{V} \in L^2_\Sigma(\Omega)$ は (3.22) と (4.3) を満足する．したがって，(4.1) はヒルベルト空間 $L^2_\Sigma(\Omega)$ における発展方程式だと考えることができる．

定式化をわかりやすくするために，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$（$x$-$y$ 平面とする）を $\mathbb{R}^3$ の中に埋め込み，面に垂直な座標 z を考えて $\boldsymbol{e}_\perp := \nabla z$ と書く．

Lemma 4.1. 非圧縮条件 *(4.2)* と境界条件 *(4.3)* を満たす任意の $\boldsymbol{V}$ は *Clebsch* 表現

$$\boldsymbol{V} = \nabla\varphi \times \boldsymbol{e}_\perp \; [= \nabla \times (\varphi \nabla z)] \tag{4.5}$$

の形に書くことができる．ただし，φ は一価関数であり，境界条件 $\gamma_0\varphi = 0$ をみたす．すなわち，

$$L^2_\Sigma(\Omega) = \{\nabla\varphi \times \boldsymbol{e}_\perp;\, \varphi \in H^1_0(\Omega)\}. \tag{4.6}$$

Proof. 明らかに $\nabla\cdot(\nabla\varphi \times \boldsymbol{e}_\perp) = \nabla\cdot[\nabla \times (\varphi\boldsymbol{e}_\perp)] = 0$．また，$\varphi \in H^1_0(\Omega)$ に対して $\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\varphi\times\boldsymbol{e}_\perp) = (\boldsymbol{e}_\perp\times\boldsymbol{n})\cdot\nabla\varphi = 0$．したがって，$X = \{\nabla\varphi\times\boldsymbol{e}_\perp;\, \varphi\in H^1_0(\Omega)\} \subseteq L^2_\Sigma(\Omega)$. そして，$X$ の $L^2_\Sigma(\Omega)$ における補空間は $\{0\}$ である．これを示そう．$\boldsymbol{V} \in L^2_\Sigma(\Omega)$ が

$$(\boldsymbol{V}, \nabla\varphi \times \boldsymbol{e}_\perp) = 0 \quad \forall\varphi \in H^1_0(\Omega). \tag{4.7}$$

を満たすとする．一般化された Stokes の定理により $(\boldsymbol{V}, \nabla\varphi\times\boldsymbol{e}_\perp) = (\boldsymbol{e}_\perp\cdot\nabla\times\boldsymbol{V}, \varphi)$. ここで $\nabla\times\boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{e}_\perp$ のコンポーネントしかもたないので，(4.7) は $\nabla\times\boldsymbol{V} = 0$ であることを意味する．$\boldsymbol{V}\in L^2_\Sigma(\Omega)$ であるから，$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0$ かつ $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V} = 0$．$L^2_\Sigma(\Omega)$ の元でこれらをみたすものは 0 しかない．したがって (4.6) を得る（[10] 参照）．
□

Clebsch 表現 (4.5) を用いて渦度を書くと，

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{V} = (-\Delta\varphi)\boldsymbol{e}_\perp =: \omega\boldsymbol{e}_\perp\,.$$

これを渦方程式 (4.4) に代入すると，$\boldsymbol{e}_\perp$ 成分だけの方程式となり，[3]

$$\partial_t\omega = [\omega, \mathscr{K}\omega] \;\; (\text{in } \Omega), \tag{4.8}$$

[2] したがって $L^2_H(\Omega) = \{0\}$．多重連結領域を考える場合は，コホモロジー群（調和ベクトル場）を考える必要があるが，これはダイナミックではない（フラックスは保存量である）ので，関数空間から除いておけばよい．

[3] 十分滑らかな $\boldsymbol{V}$ に対して，2 次元渦方程式 (4.8) は非線形 Liouville 方程式の形をとる．これに対応するハミルトンの方程式 (特性常微分方程式) はハミルトニアン＝流れ関数 (Clebsch ポテンシャル) φ を用いて $d\boldsymbol{x}/dt = (\partial_y\varphi, -\partial_x\varphi) = \boldsymbol{V}$. と書ける．境界条件 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{e}_\perp\times\boldsymbol{n})\cdot\nabla(\mathscr{K}\omega) = 0$ により，特性曲線は領域 Ω 内に閉じ込められている．したがって，ω について境界条件を必要としない（与えてはならない）．渦方程式 (4.8) のみによって ω の時間発展が決められ，対応する流れは $\boldsymbol{V} = \nabla(\mathscr{K}\omega)\times\boldsymbol{e}_\perp$ と定めることができる．

ただし

$$[a,b] = -\nabla a \times \nabla b \cdot \boldsymbol{e}_\perp = \partial_y a \cdot \partial_x b - \partial_x a \cdot \partial_y b,$$

$\mathscr{K}$ は $-\Delta$ の逆作用素（Dirichlet 境界条件のもとでの）である：$\mathscr{K} : \omega \mapsto \varphi$ は Laplace 方程式

$$-\Delta\varphi = \omega \ (\text{in } \Omega), \quad \varphi = 0 \ (\text{on } \partial\Omega) \tag{4.9}$$

の解を与える．よく知られているように，$\mathscr{K} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ は自己共役作用素である．$\varphi \in H_0^1(\Omega)$ に対して $\omega = -\Delta\varphi$ を $H^{-1}(\Omega)$ の元として与えることができる．[4]逆作用素は $\mathscr{K} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ によって弱解を与える．

Theorem 4.1. 渦方程式 *(4.8)* を関数空間 $H^{-1}(\Omega)$ における発展方程式と解釈する：すなわち，弱形式

$$(\partial_t \omega - [\omega, \mathscr{K}\omega], \phi) = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.10}$$

で考える．関係 $\varphi = \mathscr{K}\omega$, $\boldsymbol{V} = \nabla\varphi \times \boldsymbol{e}_\perp$, および $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_\perp$ のもとで *(4.10)* は $L^2_\sigma(\Omega)$ における発展方程式としてのオイラー方程式 *(4.1)* と等価である．

Proof. $L^2_\sigma(\Omega)$ の位相でオイラー方程式 (3.24) は

$$(\partial_t \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla\tilde{p}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in L^2_\sigma(\Omega) \tag{4.11}$$

を意味する．Theorem 2.5 により ,(4.11) の左辺は $(\partial_t \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v})$ となる．Lemma 4.1 により，$\boldsymbol{v} = \nabla\phi \times \boldsymbol{e}_\perp = \nabla \times (\phi \boldsymbol{e}_\perp)$（$\phi \in H_0^1(\Omega)$）とおくことができる．これを (4.11) に代入して

$$\begin{aligned}(\partial_t \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}, \nabla \times (\phi \boldsymbol{e}_\perp)) &= (\boldsymbol{e}_\perp \cdot \nabla \times (\partial_t \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}), \phi) \\ &= (\partial_t \omega - [\omega, \varphi], \phi).\end{aligned}$$

したがって (4.11) は (4.10) と等価である． □

弱形式の渦方程式 (4.10) をハミルトン形式に書こう．ハミルトニアンはエネルギーであるから，自然な選択として $H = \|\boldsymbol{V}\|^2/2$ であろう．Clebsch 表現 $\boldsymbol{V} = \nabla\varphi \times \boldsymbol{e}_\perp$ を使って $H = \|\nabla\varphi\|^2/2 = (\varphi, -\Delta\varphi)/2$ と書くこともできる．いま状態ベクトルは渦度 ω であるから，$\varphi = \mathscr{K}\omega$ と表現して

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega dx\, (\mathscr{K}\omega) \cdot \omega, \tag{4.12}$$

とおく．これは $H^{-1}(\Omega)$ 上の連続汎関数である．また，$H^{-1}(\Omega)$ のノルム（$H_0^1(\Omega)$ の “negative norm”）の 2 乗である．

この汎関数の —$L^2(\Omega)$ の内積に関する— 勾配は，作用素 $\mathscr{K}$ の自己共役性を用いて，

$$\partial_\omega H(\omega) = \mathscr{K}\omega \tag{4.13}$$

と計算される．$\partial_\omega H(\omega)$ は全ての $\omega \in H^{-1}(\Omega)$ に対して $H_0^1(\Omega)$-値のベクトルとして評価できる．

---

[4] $H^{-1}(\Omega)$ は $H_0^1(\Omega)$ の（$L^2(\Omega)$ の内積に基づく）共役空間である．

次にポアッソン作用素を定式化する．形式的には [5, 6, 7, 8]

$$\mathscr{J}(\omega)\psi = [(\partial_y\omega)\partial_x - (\partial_x\omega)\partial_y]\,\psi = [\omega, \psi] \tag{4.14}$$

と置けばよい．しかし，こう書くには ω が（何らかの意味で）微分可能な関数でなくてはならない．私たちは，ω の微分可能性について強い条件を仮定できない（そうすると可解性が危うくなる）ので，これを一般化する必要がある．空間 $H^{-1}(\Omega)$ での弱形式に見合う定式化が必要なのである (Theorem 4.1 参照)．形式的に計算すると

$$(\mathscr{J}(\omega)\psi, \phi) = ([\omega, \psi], \phi) = (\omega, [\psi, \phi]). \tag{4.15}$$

この右辺は $\omega \in C(\Omega)$，$\psi, \phi \in H_0^1(\Omega)$ に関して定義可能である．実際

$$\begin{aligned}
|(\omega, [\psi, \phi])| &\leq \|\omega\|_{\sup} \int_\Omega dx\, [\psi, \phi]| \\
&\leq \|\omega\|_{\sup} \int_\Omega dx\, |\nabla\psi|\, |\nabla\phi| \\
&\leq \|\omega\|_{\sup} \|\nabla\psi\| \|\nabla\phi\|,
\end{aligned}$$

ただし $\|\omega\|_{\sup} = \sup_{x\in\Omega}|\omega(x)|$．したがって (4.15) の右辺は $\phi \in H_0^1(\Omega)$ に対する有界線形写像だと考えることができる（ω と ψ は 2 つのパラメタとして含まれる）．これを $(\omega, [\psi, \phi]) =: F(\omega, \psi; \phi)$ と書く．この汎関数によって，(4.15) の左辺にある $\mathscr{J}(\omega)\psi$ を $H_0^1(\Omega)^* = H^{-1}(\Omega)$ の元として「定義」する．すなわち，

$$(\mathscr{J}(\omega)\psi, \phi) := F(\omega, \psi; \phi) \quad \forall\phi \in H_0^1(\Omega).$$

$\omega \in C(\Omega)$ をパラメタとすると，$\mathscr{J}(\omega)$ は ψ に作用する有界線形写像である：

$$\mathscr{J}(\omega) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

明らかに $(\mathscr{J}(\omega)\psi, \phi) = -(\psi, \mathscr{J}(\omega)\phi)$, したがって $\mathscr{J}(\omega)$ は反対称である．

以上をまとめて渦方程式 (4.8) をハミルトン形式

$$\partial_t\omega = \mathscr{J}(\omega)\partial_\omega H(\omega) \tag{4.16}$$

に書くことができる．Theorem 4.1 に示したように (4.16) は $H^{-1}(\Omega)$ の弱形式発展方程式であり，$L^2_\sigma(\Omega)$ の発展方程式としてのオイラー方程式 (4.1) と等価である．

Remark 4.1. 任意の $\omega \in C(\Omega)$ にたいして $\mathscr{J}(\omega)$ は $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ の有界線形作用素として定義されている（上限は ω の関数として変化する）．また $\partial_\omega H(\omega)$ は $H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ の有界線形作用素である．したがって，発展方程式 (4.16) の右辺＝生成作用素を構成する「各部分」はきちんと定義されたことになる．しかし，生成作用素全体として考えるとき，$\mathscr{J}(\omega)$ は $\partial_\omega H(\omega)$ と共通の ω で評価しなくてはならず，このことによって生成作用素が非線形になる（Remark 3.1）．$\partial_\omega H(\omega)$ は全ての $\omega \in H^{-1}(\Omega)$ に対して評価でき，値は $D(\mathscr{J}(\omega)) = H_0^1(\Omega)$ の中にとるのだが，その前提として $\mathscr{J}(\omega)$ が定義されて

いなくてはならない．ところが，$\mathscr{J}(\omega)$ は $\omega \in C(\Omega)$ に対してしか定義できない．

このことが，この問題の非線形性の難しさの本質を「幾何学的」に表現している：軌道 $\omega(t)$ ($\subset H^{-1}(\Omega)$) がノルム $\|\omega\|_{\sup}$ に関して「遠方」へ遠ざかってゆくとすると，その遠方では幾何学構造（ポアッソン作用素 $\mathscr{J}(\omega)$ ）が定義されなくなり，発展方程式 (4.16) は意味を失うのである．

$\mathscr{J}(\omega)$ と $\partial_\omega H(\omega)$ の結合が成立するためには，生成作用素 $\mathscr{J}(\omega)\partial_\omega H(\omega)$ の定義域を $C(\Omega)$ に制限しなくてはならない．幸運にも，この定義域は十分に広い：十分滑らかな（Hölder 連続）初期条件から出発した軌道は，$\|\omega\|_{\sup}$ が有限な領域の中に留まることが証明されるからである [4].

4.2 カシミール元

4.2.1 $\mathscr{J}(\omega)$ の核

ポアッソン作用素 $\mathscr{J}(\omega)$ の核（$H_0^1(\Omega)$ の部分空間) を調べよう．

Proposition 4.1. $\omega \in C(\Omega)$ が与えられたとき，$\psi \in H_0^1(\Omega)$ が $\mathrm{Ker}(\mathscr{J}(\omega))$ の元であるための必要十分条件は

$$\omega\nabla\psi = \nabla\theta \quad \exists\theta \in H^1(\Omega), \tag{4.17}$$

と書けることである．したがって，

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{J}(\omega)) = \{\psi \in H_0^1(\Omega) \mid \omega\nabla\psi \in L^2_\sigma(\Omega)^\perp\}. \tag{4.18}$$

Proof. 定義 (4.14) より , $\psi \in \mathrm{Ker}(\mathscr{J}(\omega))$ であるとは，$H^{-1}(\Omega)$ の位相で $[\omega, \psi] = 0$ であること，すなわち

$$([\omega,\psi],\phi) \equiv -(\omega\nabla\psi, \nabla\phi \times \boldsymbol{e}_\perp) = 0 \quad \forall\phi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.19}$$

を意味する．Lemma 4.1 により，(4.19) は

$$(\omega\nabla\psi, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall\boldsymbol{v} \in L^2_\sigma(\Omega) \tag{4.20}$$

を意味する．(4.17) したがって (4.18) を得る． □

核の元 $\psi \in \mathrm{Ker}(\mathscr{J}(\omega))$ に対して，これを「積分」してカシミール元を作るためには，ω と ψ の明示的な関係が必要である．

まず $\omega \in C^1(\Omega)$ としよう．すると $\mathscr{J}(\omega)\psi$ は古典的に $[\omega,\psi] \equiv -\nabla\omega \times \nabla\psi \cdot \boldsymbol{e}_\perp \in L^2(\Omega)$ と表現できる. したがって $\psi \in H_0^1(\Omega)$ が $\mathrm{Ker}(\mathscr{J}(\omega))$ の属するための必要十分条件は

$$[\omega,\psi] = 0 \quad [\in L^2(\Omega)]. \tag{4.21}$$

式 (4.21) は $\nabla\omega \in C(\Omega)$ と $\nabla\psi \in L^2(\Omega)$ がほとんど全ての点（ただしこれらの一方が 0 になる領域を除いて）で平行になることを意味する．そのような ω と

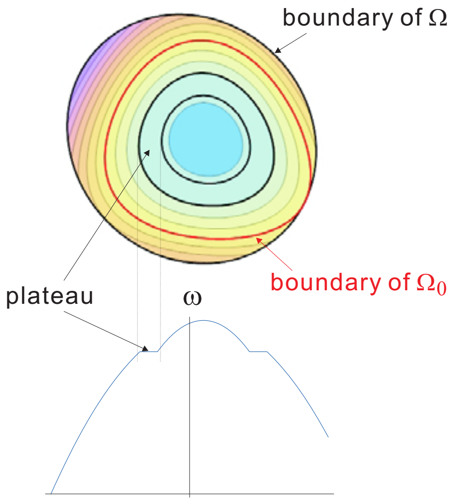

Fig. 4.1 関数 ω が与えられたとき，$\Omega_\circ(\omega)$ とは，Ω の部分領域であり，ω のレベルセットを境界とするような最大の領域である．また「プラトー」$\Omega_p \subset \Omega$ すなわち ω=constant となる部分領域も示す．

ψ の関係は，あるスカラー関数 $\zeta(x,y)$ を用いて，

$$\omega = f(\zeta), \quad \psi = g(\zeta). \tag{4.22}$$

と書ける．最も簡単な解は

$$\psi = g(\omega) \tag{4.23}$$

(つまり $f = I$)．この解のクラスについては ψ が ω の関数として明示的（explicit）であるから，これを「積分」して

$$C(\omega) = \int_\Omega G(\omega)\, d^2x \tag{4.24}$$

とすればよい．ただし $G(\tau) = \int g(\tau)\, d\tau$ である．

この構築から明らかなように，ω と ψ の implicit な関係である (4.22) を網羅する核の元 ψ についてカシミール元を生成することは困難である．形式的に (4.22) を $\psi = g \circ f^{-1}(\omega)$ と書くと，f^{-1} が一価関数にならない場合である．

以上では ω が $C\ 1(\Omega)$ に属すると仮定したが，この条件は少し緩めることができ，$\omega \in C^{0,1}(\Omega)$（すなわち Lipschitz 連続関数）に拡張してよい．Lipschitz 連続関数については，ほとんど全ての点で古典的な勾配微分 $\nabla\omega$ が評価でき，また $|\nabla\omega|$ は有界である [9]．

上記の $g(\tau)$ は正則性についていえば Lipschitz 連続であれば十分であるが，$\psi \in H^1_0(\Omega)$ であるためには境界条件 $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ を要するので，これを満たすように選ぶ必要がある．$\Omega_\circ(\omega) \subseteq \Omega$ は，その中に含まれる ω のレヴェルセットが境界と交わらないような領域であって最大のものとする（Fig. 4.1 参照）．こ

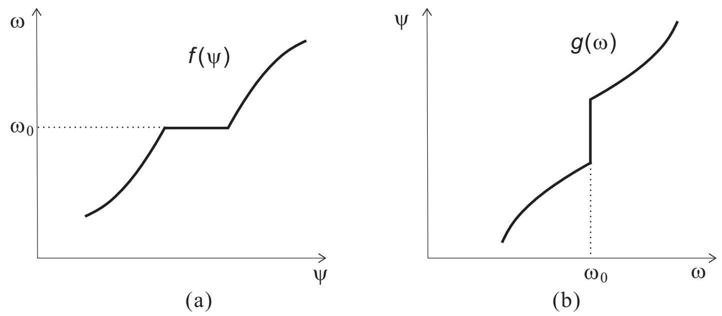

Fig. 4.2 ψ と ω の関係を表現するグラフの双対な関係. (a) プラトーをもつ $\omega = f(\psi)$ のグラフ. (b) ジャンプをもつ $\psi = g(\omega)$ のグラフ.

れは連結集合である必要はないが，以下の議論では $\Omega_\circ(\omega)\ \emptyset$ となるような ω を考えて議論をすすめる．関数 $\psi = g(\omega)$ が境界条件 $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ を満たすためには，$\mathrm{supp}(\psi) := \overline{\{x \in \Omega \mid \psi(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega_\circ(\omega)$ となるように関数 $g(\tau)$ を選ばなくてはならない.

しかし，(4.23) は $\mathscr{J}(\omega)$ の「特異点」から生じる別の種類の解を見落としている．ω が〈プラトー = plateau〉をもつとき，すなわち $\omega = \omega_0$ (constant) となる領域 $\Omega_p \subseteq \Omega$ があるとき（図 4.1 参照），そこで局所的に作用素 $\mathscr{J}(\omega)$ は恒等的に 0 となる：

$$\mathscr{J}(\omega) = \{\omega_0, \cdot\} = 0 \text{ in } \Omega_p.$$

したがって Ω_p 内では任意の ψ に対して $\theta = \omega_0 \psi$ と置けば (4.17) を満たすことができる．上記の解 (4.23) は，$\psi = g(\omega_0) = \text{constant in } \Omega_p$ と制限していることに注意しよう．この制限（退化）を除くためには関数 g の連続性を捨てなくてはならない．まず，(4.22) に戻って，(4.23) を逆転した解

$$\omega = f(\psi) \tag{4.25}$$

を考える．ここで f は Lipschitz 連続な関数とする $\vartheta(\eta) = \int d\eta\, f(\eta)$ とおくと，$\omega \nabla \psi = \nabla \vartheta(\psi)$ と計算することができる．ただし，両辺の勾配微分は，ψ が Lipschitz 連続であれば，Ω 内のほとんど全ての点で古典的に評価できる．もし $f(\eta)$ がある区間 $\psi_- < \eta < \psi_+$ で一定値 ω_0 をとると，関数 $f(\psi)$ は $\psi_- < \psi < \psi_+$ の領域でプラトー $f(\psi) \equiv \omega_0$ をもつ: 図 4.1，4.2(a) 参照．ω に対して ψ を求めるという立場にもどると，$g = f^{-1}$ とおいて (4.25) を (4.23) の形に書きなおすことになる．このとき，f のグラフにおけるプラトーは g のグラフの〈ジャンプ = jump〉になる：図 4.2(b).

有限な領域 $\Omega_p \subseteq \Omega$ でプラトーをもつ関数 $\omega(x,y)$ が与えられたとき，関数 $g(\xi)$ は $\xi = \omega_0 := \omega|_{\Omega_p}$ においてジャンプをもつことを許すものとする．このような関数の一般形を $g(\omega) = g_L(\omega) + \alpha Y(\omega - \omega_0)$ とおく．ただし，$g_L(\omega)$ は Lipschitz 連続な関数，$Y(\omega - \omega_0)$ はステップ関数，そして α はジャンプの幅を与える定数である．ステップ関数のギャップ $\lim_{\omega \uparrow \omega_0} g(\omega) = \psi_-$ と $\lim_{\omega \downarrow \omega_0} g(\omega) = \psi_+ = \psi_- + \alpha$ の間を繋いでグラフを連結集合にしておく：図 4.2(b) 参照．関数

$g(\omega)$ は特異点 $\omega=\omega_0$ において多価あるから，関数 $\psi(\boldsymbol{x})=g(\omega(\boldsymbol{x}))$ の値はプラトー Ω_p において，区間 $[\psi_-,\psi_+]$ 内で任意の値をとることができる．十分滑らかな ψ を選んで，$\psi\in H^1(\Omega)$ と仮定することができる．

以上をまとめて次の系を得る．

Corollary 4.1. $\omega\in C^{0,1}(\Omega)$ は $\Omega_\circ(\omega)\neq\emptyset$ を満たす関数であるとする．このとき *Ker*$(\mathscr{J}(\omega))$ は $D(\mathscr{J}(\omega))=H^1_0(\Omega)$ の無限次元部分空間であり，次のように表現される元を含む：

$$\psi=g(\omega), \tag{4.26}$$

ただし $g(\xi)$ は境界条件

$$g(\omega(\boldsymbol{x}))=0 \quad \forall\boldsymbol{x}\in\partial\Omega \tag{4.27}$$

を満たし，

$$g(\xi)=g_L(\xi)+\sum_{\ell=1}^{\nu}\alpha_\ell Y(\xi-\omega_\ell) \tag{4.28}$$

と表わすことができる関数である．ここで $g_L(\xi)$ は *Lipschitz* 連続な任意の関数，ν は ω がもつプラトーの数，ω_ℓ は ω のプラトー値, $Y(\xi)$ は連結されたステップ関数，α_ℓ は任意の定数である．

Remark 4.2. Ker$(\mathscr{J}(\omega))$ の元を表現する $g(\omega)$ に関する仮定 (4.28) は，まだかなり制限されたものである：

(i) プラトー領域において，(4.17) はさらに多様な分布をもちえる．実際，プラトー内での ψ の値は区間 $[\psi_-,\psi_+]$ に制限される必要はない．この区間を超える値をもつ ψ を考えようとすると，$g(\xi)$ のグラフは ω_0 においてジャンプするだけでなく「ひげ」をもったものになる．しかし.，次項で述べるように，そのようなグラフは，それを積分してカシミール元を構築することができない．

(ii) (4.28) において，連続な部分 $g_L(\xi)$ は，さらに Lipschitz 連続であると仮定している．この仮定のもとで，$\psi=g(\omega)$ $(\omega\in C^{0,1}(\Omega))$ は Lipschitz 連続であることが保証され，したががって $\psi\in H^1(\Omega)$ である．しかし，この正則性条件は．個別の ω については緩和することができる．実際，$g'(\omega)\nabla\omega\in H^1(\Omega)$ が満たされさえすればよい．

4.2.2 カシミール元の構築

最後に，Corollary 4.1 で与えた Ker$(\mathscr{J}(\omega))$ の元を ω について「積分」して，カシミール元 $C(\omega)$ を構築しよう．

最初に $g(\xi)\in C(\mathbb{R})$ を仮定しよう．$G(\xi):=\int d\xi\, g(\xi)$ とおいて

$$C_G(\omega)=\int_\Omega dx\, G(\omega) \tag{4.29}$$

とする．この汎関数の勾配は，定義 (3.2) にしたがって計算すれば容易にもとめられる：ω を $\epsilon\tilde{\omega}$ で摂動すると

$$\delta C_G(\omega,\tilde{\omega}) = \varepsilon \int_\Omega dx\, g(\omega)\tilde{\omega} + O(\varepsilon^2).$$

したがって $\partial_\omega C_G(\omega) = g(\omega)$ をえる．つまり，(4.29) によって定義した $C_G(\omega)$ は $g(\omega) \in \mathrm{Ker}(\mathscr{J}(\omega))$ に対応するカシミール元である．

つぎに，プラトーをもつ ω において生じる特異な $g(\omega)$ について，これを積分することを考えよう．ジャンプをもつ $g(\xi)$ に対する形式的な原始関数 $G(\xi)$ は〈キンク = kink〉をもつ関数となり，折れ曲がり点では古典的な微分係数は計算できない．したがって「特異なカシミール元」を定義するためには，同時に勾配微分の概念も拡張しなくてはならない．ここでは *Clarke gradient* [3] を用いて特異な汎関数の勾配を定義する：$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の Clarke gradient（$\tilde{\partial}_x F(x)$ と書く）とは，

$$\lim_{j\to\infty} \partial_x F(x+\delta_j) \quad \text{with} \quad \lim_{j\to\infty} \delta_j = 0. \tag{4.30}$$

なる極限値の集合の凸包（convex hull）として定義される集合値関数である．$F(x)$ が連続微分可能である場合は，明らかに $\tilde{\partial}_x F(x)$ は古典的な勾配（微分係数）$\partial_x F(x)$ と等しい．$F(x)$ がキンクをもつとき，折れ曲がり点で $\tilde{\partial}_x F(x)$ を評価すると，図 4.2(b) に示したような「ギャップを埋めた」ジャンプが得られる．もし $F(u)$ がヒルベルト空間 X で定義された下半連続凸関数であるなら，$\tilde{\partial}_u F(u)$ は〈劣微分 = sub-differential〉，すなわち

$$\tilde{\partial}_u F : u \mapsto \{g \,|\, F(u+\delta) - F(u) \geq (g,u),\ \forall \delta \in X\}, \tag{4.31}$$

に等しい [2, 11].

以上をまとめると次の命題を得る．

Proposition 4.2. $\omega \in C^{0,1}(\Omega)$ は $\Omega_\circ(\omega) \neq \emptyset$ を満たす関数であるとする．*(4.27)* および *(4.28)* を満たす $g(\xi)$ に対して一般化された原始関数 $G(\xi)$ を $g(\xi) = \tilde{\partial}_\xi G(\xi)$ となるように定める．$C_G(\omega) = \int_\Omega dx\, G(\omega)$ と定義すると，これは $\tilde{\partial}_\omega C_G(\omega) \in Ker(\mathscr{J}(\omega))$ を満たす一般化されたカシミール元である．

References

1. V.I. Arnold and B.A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics* (Springer, 1998).
2. H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert* (North-Holland, 1973).
3. F. H. Clarke, Trans. Amer. Math. Soc. **205**, 247 (1975).
4. T. Kato, *On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **25**, 188 (1967).
5. P. J. Morrison, Phys. Lett. **80A**, 383 (1980).
6. P. J. Morrison, 1981a, "Hamiltonian field description of two-dimensional vortex fluids an guiding center plasmas," Princeton University Plasma Physics Laboratory Report, PPPL-1783. Available as American Institute of Physics Document No. PAPS-PFBPE-04-771-24, AIP Auxiliary Publication Service, 335 East 45th Street, New York, NY 10017.
7. P. J.Morrison, in *Mathematical Methods in Hydrodynamics and Integrability in Related Dynamical Systems*, AIP Conference Proceedings No. **88**, edited by M. Tabor and Y. Treve (AIP, New York, 1982), p. 13.

8. P. J. Olver, J. Math. Anal. Appl. **89**, 233 (1982).
9. E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., no. 30 (Princeton Univ. Press, Princeton, 1970).
10. Z. Yoshida, J. Math. Phys. **50**, 113101 (2009).
11. 吉田善章，新版　応用のための関数解析 —その考え方と技法（サイエンス社，2006）.
12. Z. Yoshida, P. J. Morrison and F. Dobarro, *Singular Casimir elements of the Euler equation and equilibrium points*, arXiv:1107.5118 [math-ph] 30 Jul 2011.