

1. 渦とは

渦とは“curl”によって計られる場の歪みの基本量であって、これを一般次元に拡張すると、1次微分形式の外微分として表わされるもの全てである。さらに広く展望すると、外微分と内部積を組み合わせたLie微分やシンプレクティック2次形式に対応するPoisson括弧積なども渦を表現する数学的形式といってよい。流速ベクトル V に対して渦度 $\omega = \nabla \times V$ 、電磁場のベクトルポテンシャル A に対して磁場 $B = \nabla \times A$ 、4次元ポテンシャル A^μ に対してFaradayテンソル $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 、オブザーバブル X に対して $\{H, X\} := \mathcal{J}^{jk}(\partial_j H)(\partial_k X)$ (\mathcal{J}^{jk} : Poisson行列, H : Hamiltonian) など、物理のあらゆる領域に渦が現れる。まさに万物は「流転」するのだ。

時空の曲率に関する理論を重力理論と呼ぶように、時空のねじれ (helicity) に関する理論が渦理論だといってよいだろう。重力、遠心力、静電力のグループに対して、渦はCoriolis力、磁力の仲間を構成する。その特徴は「運動の方向を変えようとするが、仕事をしない」ことにある。したがって、エネルギーではなく、運動量の変形として表現される。物質が電荷をもつと運動量 mV は正準運動量 $P = mV + qA$ になる。これによって、渦度は磁場をまとった正準渦度 $\Omega = \nabla \times P = m\omega + qB$ になる。プラズマの運動を支配するのは、この正準渦度である。

渦現象の面白さは、渦とスカラー(さらには他の次数の場)という本来異なる特性のものが関係することである。たとえば、気圧の変動が渦を生み、逆に渦は気圧の変化を伴う。しかし、スカラー Φ が定義するベクトル $d\Phi \equiv \nabla\Phi$ には渦がない。この関係(すなわち完全系列)を「不完全化」して渦を生じさせるのは空間の不均一である。ある変動量 \tilde{Q} の循環とは $\oint \tilde{Q}$ のことであるが、 \tilde{Q} が完全微分形式 $d\Phi$ であるとき $\oint d\Phi = 0$ となる。これが「渦なし」ということの積分表現であるが、空間が歪んで $d\Phi \rightarrow \mu d\Phi$ (いわゆるClebsch形式)となると循環すなわち渦($d(\mu d\Phi) = d\mu \wedge d\Phi$)が生じる。

エネルギー、仕事、熱の関係 $d\mathcal{E} = \tilde{W} + \tilde{Q}$ (すなわち第一法則)を、渦とサイクルの関係として読み解こう。4次元時空で考える。流体速度 U_μ と場のテンソル $M^{\mu\nu} = \partial^\mu P^\nu - \partial^\nu P^\mu$ をもちいて力学の部分を $d\mathcal{E} - \tilde{W} = U_\mu M^{\mu\nu}$ と書くことができる。さらに熱の部分 \tilde{Q} をエントロピーで書くと、 $U_\mu M^{\mu\nu} = T(dS - \tilde{S}')$

を得る． $M^{\mu\nu}$ は 4 次元正準運動量 P^μ の「時空渦」である．運動量の循環の時間変化は $(d/ds) \oint_{L(s)} P^\nu dx_\nu = \oint_{L(s)} U_\mu M^{\mu\nu} dx_\nu$ となる．前式から，これは熱のサイクル $\oint \tilde{Q} = \oint T(dS - \tilde{S}')$ とバランスする．準静的 ($\tilde{S}' = 0$) であっても， TdS (あるいは SdT) が完全微分でなければ，渦が生まれる．なべ底を加熱して熱対流の渦が生まれるのは，重力が S を歪めているからだ．

2．渦 = 磁場のコスモロジー：相対論的循環則と宇宙初期磁場の創造

宇宙は渦 = 磁場でみたまされている．その起源，すなわち「種」がどのようにして生まれたのかが大きな謎である．理想的な運動方程式は循環 (あるいは helicity) を保存するので，初期において渦が 0 であれば，ずっと 0 のままだからである．しかし，この問題を相対論の枠組みに立ち戻って考えると，実は保存されるのは時空のなかを運動するループ $L(s)$ (s は固有時間) に係る循環 $\oint_{L(s)} P^\nu dx_\nu$ である．ある規準系で定義したループ $L(t)$ (t は規準系の時間) について循環を計算すると， $(d/dt) \oint_{L(t)} P \cdot dl = \oint_{L(t)} (T/\gamma) dS$ となる．たとえ TdS が完全微分でも， γ と S は無関係であるから，右辺は一般に 0 でない．相対性原理によって生じる時空間の歪みが渦 = 磁場を生み出すのである [1]．このメカニズムは，初期宇宙だけでなく，高エネルギー天体や強力なレーザー場などでも重要な働きをしていると考えられる．

3．磁気圏プラズマの自己組織化：マクロ階層位相空間の葉層構造と渦

天体のダイポール磁場がプラズマを引き寄せて渦構造 = 磁気圏を自己組織化するのには，ダイポール磁場の強い局所性が荷電粒子にとって「空間の歪み」を作っているからである [2]．磁化された荷電粒子は，サイクロトロン運動，バウンス運動という周期運動に対応する断熱不変量によって束縛された部分空間の中で運動する．周期運動を粗視化した「マクロ階層」とは，この部分空間すなわち断熱不変量によって葉層化 (foliation) された位相空間の葉に他ならない．このとき，エントロピーを評価すべき不変測度は葉の体積要素であり，熱平衡への緩和は葉の上で一様な分布を作る．それを実験室系に埋め込むと密度は偏りをもつようになる．葉の上のメトリックが歪んでいるからである．葉の上での平坦化は，実験室系では内向き拡散 (uphill diffusion) として観測される．このことは，RT-1 実験装置において純電子プラズマの内向き拡散を観測し，実験的な証明が与えられた [3]．

[1] S.M. Mahajan and Z. Yoshida, Phys. Rev. Lett. **105** (2010), 095005.

[2] A. Hasegawa, Comments Plasma Phys. Controlled Fusion **1** (1987), 147.

[3] Z. Yoshida *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010), 235004.