

非一様 Beltrami ベクトル場とプラズマ中の
ショック構造

指導教官

吉田善章 助教授

小川雄一 助教授

東京大学 工学部 システム量子工学科

60072 大崎 秀一

目次

第1章 序論	4
第2章 Beltrami ベクトル場	11
2.1 プラズマの平衡	11
2.2 極小エネルギー磁場配位	14
2.3 二重 Beltrami ベクトル場	15
2.4 非一様 Beltrami ベクトル場	19
第3章 不連続 Beltrami ベクトル場の接続とショック構造	21
3.1 双曲型偏微分方程式とショック	21
3.1.1 非線形波動方程式と不連続波形の形成	21
3.1.2 Rankine-Hugoniot 条件	23
3.1.3 発展性条件	28
3.2 Beltrami ベクトル場の平衡解	34
3.3 プラズマ物理における保存則	35
3.4 Beltrami ベクトル場における Rankine-Hugoniot 条件	40
3.5 解の導出とその性質	44
3.5.1 Rankine-Hugoniot 条件の簡素化	44

3.5.2	接触不連続面	44
3.5.3	ショック解	45
3.5.4	物理的な解の選択	46
3.5.5	磁場の効果	49
3.6	流れを持つ Beltrami ベクトル場のショック	50
3.7	二重 Beltrami ベクトル場のショック	54
第 4 章	軸対称非一様 Beltrami ベクトル場	57
4.1	対称性をもつ磁場の平衡	57
4.1.1	磁気面	57
4.1.2	Grad-Shafranov 方程式	60
4.2	Beltrami ベクトル場への応用	62
4.3	二重 Beltrami ベクトル場への応用	64
第 5 章	まとめ	67
付録 A	プラズマの平衡方程式	71
付録 B	Waltjer-Taylor の変分計算	73
付録 C	双曲型偏微分方程式と波動方程式	75
付録 D	Riemann 問題	80
付録 E	気体におけるショック	81
付録 F	プラズマ中の波動	87

関連図書	91
謝辞	93

第1章 序論

プラズマは電磁場との相互作用によって本質的に非線形な系である。その中でも磁場のねじれ構造が重要な課題になっている。宇宙空間や実験室でみられるプラズマ中の磁場は多くの場合ねじれている。ねじれの構造を表すものとして、特にプラズマの平衡解である Beltrami ベクトル場 (Beltrami field) が重要である。

Beltrami ベクトル場はプラズマの定常状態の特別なクラスとして (1.1) 式で表される。

$$\nabla \times B = \lambda B \quad (1.1)$$

ここで B は磁場、 λ はスカラー関数である。また、 $\nabla \cdot B = 0$ なので、

$$B \cdot \nabla \lambda = 0 \quad (1.2)$$

を満たさねばならない。(1.2) 式は磁力線にそって λ は一定値であることを意味する。

また、 B を流れ v と思うと、流れ (v) と渦度 ($w = \nabla \times v$) が平行という Beltrami 条件は非線形である渦度方程式の解となるため、プラズマのみならず一般流体においても非常に重要である。

プラズマ中において Beltrami ベクトル場は $\text{low}\beta$ プラズマ (圧力を p とすると $\nabla p = 0$ の極限) における平衡解であり、無力磁場配位 (force free field) とな

る (2.1 節)。このような $\text{low}\beta$ プラズマ、つまり強磁場中における平衡解である Beltrami ベクトル場は自然界では非常に重要であると考えられている。初め宇宙空間のプラズマに関連した概念として、1950 年代に Chandrasekhar や Waltjer 達によって精力的に研究された。宇宙の磁場で観察されるねじれた磁場や、渦の構造の多くは Beltrami ベクトル場に深く関係していると考えられる。また実験室プラズマ (核融合研究) に関しては 1970 年代に逆転磁場ピンチ (RFP) において、大電流放電下での激しい乱れの中から、初期にセットアップした磁場構造が急速に変形し、Beltrami ベクトル場で近似される秩序ある安定な構造が自発的に形成されることが発見された。さらに 1970 年代後半に登場したスフェロマックは、トロイダル磁束とポロイダル磁束を外部から注入し、プラズマ自身に自発的に自らを閉じ込める秩序磁場構造 (Beltrami ベクトル場) を形成させようとするものである。このように Beltrami ベクトル場は宇宙空間プラズマのみならず、実験室プラズマ (核融合研究) においても非常に重要な研究テーマである。

Beltrami 条件 (1.1) 式における λ は (長さ) $^{-1}$ の次元をもち、磁場のねじれの強さを表し、構造を特徴づける示強性状態量である。現在までに、特に $\lambda = \text{const}$ である一様 Beltrami ベクトル場に関する研究は様々行われている¹。 $\lambda = \text{const}$ である一様 Beltrami ベクトル場の場合、(1.1) 式はねじれの作用素 $\text{curl}(\nabla \times)$ に関する線形固有値問題に他ならない。プラズマのある種の固有状態はこのシンプルな固有値問題によって特徴付けられ、それは電磁流体的な極小エネルギー状態という意味を持つ (2.2 節)。

しかし λ が全空間で一定の一様 Beltrami ベクトル場は局所的な渦の構造を表

¹ 例えば Chandrasekhar-Kendall 関数、ABC 流などがある。

すにはよいが、系をグローバルに見た場合、系全体に一様な渦が存在するということは有り得ない。そこでより一般的な理論が必要とされている。Beltrami ベクトル場をより一般化した概念として近年、非線形である Beltrami ベクトル場を重ね合わせた二重 Beltrami ベクトル場の研究がなされている。本研究では Beltrami ベクトル場の一般化として、 $\lambda \neq \text{const}$ である非一様 Beltrami ベクトル場を考える。非一様 Beltrami ベクトル場は、より一般的な非線形の渦構造を理解するために非常に重要と考えられるが、解析的に扱う手法はほとんど分かっていない。ここでは非一様 Beltrami ベクトル場の研究として、不連続に変化する場合と局所的な渦構造を持つ場合について理論的に取り扱う。

二重 Beltrami ベクトル場については 2.3 節で述べるが、簡単に次のようにまとめることができる。二重 Beltrami ベクトル場は磁場 B とプラズマの流れ v がカップリングしており、

$$B = a(v - \nabla \times B) \quad (1.3)$$

$$B + \nabla \times v = bv \quad (1.4)$$

のように表せる。特に a, b が定数の場合、(1.3) 式、(1.4) 式は次のように書ける。

$$\nabla \times (\nabla \times B) + \alpha \nabla \times B + \beta B = 0 \quad (1.5)$$

またこれは、

$$(\text{curl} - \lambda_+)(\text{curl} - \lambda_-)B = 0 \quad (1.6)$$

と書け、2つの Beltrami ベクトル場の重ね合わせで表される。二重 Beltrami ベクトル場は、もはや無力磁場配位ではないため、(一重)Beltrami ベクトル場とは基本的に性質が異なる。また、Beltrami パラメータ a, b を変化させるこ

とによって λ_{\pm} の大きさをかけ離れたものにすることができる。それは、構造が大きく異なり、相関を持った 2 つの Beltrami ベクトル場の重ね合わせを意味する。二重 Beltrami ベクトル場は、本研究室の実験装置 Proto-RT や太陽風、ダイナモの理論に応用されている。

以上のような背景のもと、第 3 章では非一様 Beltrami ベクトル場の研究として、 λ に「ジャンプ」が生じている場合を考える。不連続 λ の条件を求めることは MHD におけるショックの理論と密接に関係する。そこで接続条件として、MHD 方程式における Rankine-Hugoniot 条件を考える。現在までに、MHD のショックとして真空磁場 ($\nabla \times \mathbf{B} = 0, j = 0$) についてはよく研究されているが、 $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} = \mu_0 j \neq 0$ と磁場にねじれがあり電流が存在する Beltrami ベクトル場に関するショックについては計算されていない。さらに流れ (flow) が存在する場合として、磁場に平行な流れを考える。このような磁場と流れは MHD 方程式の平衡解となることを示し、そのような場におけるショックを考える。次に、磁場とカップリングした流れを加えて、二重 Beltrami ベクトル場におけるショックについて考える。

第 4 章では軸対称プラズマ中における非一様 Beltrami ベクトル場に対する考察を行う。対称性を持つ磁場構造は大域的な磁気面を持つことが示される。さらに対称性を持つ磁場の平衡条件から、Grad-Shafranov 方程式が導かれる。Grad-Shafranov の理論を Beltrami ベクトル場に用いると磁気面上で $\lambda = \text{const}$ となることが分かる。そこで Grad-Shafranov の理論を二重 Beltrami ベクトル場に応用し、非一様 Beltrami ベクトル場の重ね合わせについて考察する。つまり (1.3) 式、(1.4) 式の Beltrami パラメータ a 、 b が定数でない場合について考察する。流体やプラズマにみられるような渦構造 (フィラメント構造) は、中心部近くでは Beltrami ベクトル場であるものの、周囲との境界部ではもはや

無力状態の Beltrami ベクトル場ではなく、構造が変化しながら、周囲の構造と接続していると予想されている。しかし現在までにそのような構造に対する理論的な解析解はない。そこで a 、 b が定数でない二重 Beltrami ベクトル場を考えることによって、大きな構造をもつ Beltrami ベクトル場の中に小さな構造を持つ Beltrami ベクトル場が、局所的に、フィラメント状に存在している Beltrami 渦管について考察する。

以上のような背景のもと本研究では、非一様 Beltrami ベクトル場として、

1. λ にジャンプがある非一様 Beltrami ベクトル場の接続条件を求める (図 1.1)
2. 二重 Beltrami ベクトル場において、 λ が局在化した Beltrami 渦管について考察する (図 1.2)

ことを目的とする。

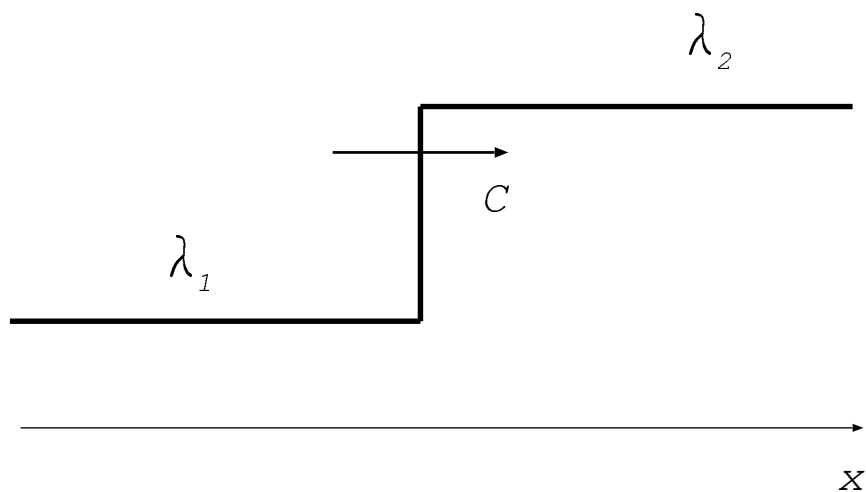


図 1.1: λ にジャンプがある場合

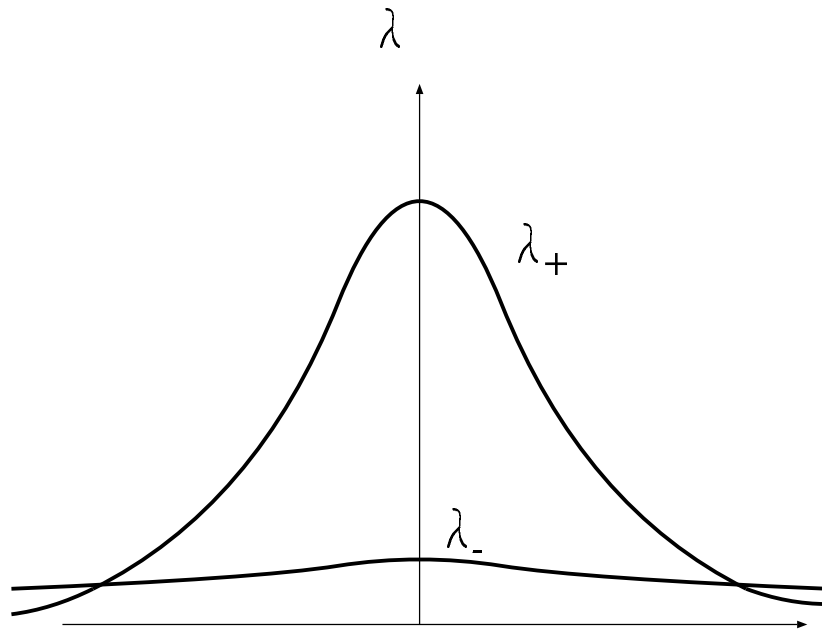


図 1.2: が局在化してる場合

また、以上の研究に関係があるのではないかと考えられる現象はプラズマや流体中で数多く見ることができる。例えば、人工衛星 Ulysses のデータ (第 5 章) に見られるような太陽風のショック構造や、プラズマ中、流体中に見られるようなフィラメント状の構造である。太陽風における磁場が真空磁場であるとは考えられず、前者はねじれのある 2 つ磁場が衝突し、その接続面がショック構造になっているのではないかと考えられている。そのねじれた磁場は Beltrami ベクトル場ではないかと考えられる。また後者のプラズマ中におけるフィラメントの統計的な性質は本研究室の実験装置 REPUTE を用いて調べられている。このフィラメント状の構造は空間の中に局所的に生じた Beltrami ベクトル場、つまり孤立した Beltrami 渦管ではないかと考えられている。

以上のように非一様 Beltrami ベクトル場が生じているのではないかと考えられる状況や証拠は多く見つかっているものの、それに対する理論的な解析手法はほとんど分かっていない。

第2章 Beltrami ベクトル場

2.1 プラズマの平衡

プラズマの巨視的な運動を記述する MHD(Magneto Hydro Dynamics) 方程式は (2.1) 式のように表される。

$$\begin{aligned}\rho \frac{D}{Dt} \mathbf{v} &= \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right\} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで ρ は質量密度、 \mathbf{v} は集団的な運動の速度、 \mathbf{j} は電流密度である。よって平衡状態では、

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p\tag{2.2}$$

が成立する。 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ (μ_0 は真空の透磁率) を用いてまとめると、プラズマの平衡方程式

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}\tag{2.3}$$

を得る。この方程式系は、2 楕円・2 退化双曲型偏微分方程式系である。また退化双曲型偏微分方程式の特性曲線は B である (付録 A)。

楕円型の偏微分方程式は境界条件を要求し、双曲型の偏微分方程式は Cauchy

のデータ¹を要求する。Cauchyのデータは特性曲線(今の場合磁力線)を含まない面の上で与える必要がある。しかし特性曲線は未知関数 B そのものであり、しかも時空内を複雑に循環するため、この方程式は簡単には解けない。プラズマ平衡における非線形の一般論は、定常オイラー方程式の場合と同様に、ほとんどと言っていいほど分かっていない。しかし対称性がある場合には、大域的な磁気面 (B を接ベクトルとする曲面、すなわち磁力線が乗った面) の存在が保証され、特性曲線が可積分となり、双曲型の部分をうまく積分することができる(4.1節)。

対称性がない一般の場合、特性曲線つまり磁力線は非可積分となり磁力線はある空間をエルゴディックに埋め尽くしていると考えられる(磁力線のカオスが生じる)。しかし自然界に形成される磁場構造というものは、多くの場合とても単純な構造を持つものである。対称性を仮定せず、 $\nabla p = 0$ の極限における平衡状態を考えると(2.2)式、(2.3)式より $j \times B = 0$ 、つまり $(\nabla \times B) \times B = 0$ である無力磁場配位 (force free field) となっている。このとき j と B 、即ち $\nabla \times B$ と B が平行でなくてはならない。よって λ をスカラー関数として Beltrami 条件、(1.1) 式を得る。

$$\nabla \times B = \lambda B \quad (1.1)$$

また $\nabla \cdot B = 0$ より、

$$B \cdot \nabla \lambda = 0 \quad (1.2)$$

である。そのなかで、特に λ が定数の場合、プラズマ平衡はねじれの作用素 $\text{curl}(\nabla \times)$ に関する線形固有値問題に帰着する。 λ が定数である一様 Beltrami

¹ 特性曲線(今の場合磁力線)を τ でパラメータ表示し、 τ を時刻とみなせば、初期条件である。

ベクトル場は Chandrasekhar-Kendall 関数、ABC 流など理論的によく研究されている。

Beltrami ベクトル場が自然界において重要であると考えられる理由を直感的に、次のように言うことができる。プラズマに電磁力が作用すると流体的 (集団的) な運動が引き起こされる。同時にその運動の速度 v による電磁誘導 $v \times B$ によって電場が変化するので電流路も変形を受けることになる。プラズマは非常に軽い物質であり、電磁力は少しの電流でも大きな力となり得るので、プラズマ中の電流 j は磁場 B にほぼ平行となるようにうまく流れなくてはならない。そうでないとプラズマは凄まじい力によってねじ曲げられてしまうわけであるが、自然界は巧みにこのような構造を形成するのである。

ここでプラズマの平衡を二つに区別することができる。

1. 磁気的な力が磁場に無関係な何らかの力 (圧力、重力など) とつりあいの状態にある場合。これは (2.2) 式で表される状態である。この場合前述のように一般論はほとんどわかってないが、対称性がある場合は磁気面の存在が保証され、磁束関数 ψ を用いて定式化できる。… Grad-Shafranov の理論
2. 磁気的な力とそれ以外の力が別々にゼロになっている場合 ($\nabla p = 0$ の極限)。このとき磁場は Beltrami ベクトル場、(1.1) 式で表される。特に λ が一定 (一様 Beltrami ベクトル場) の場合は、電磁流体的な極小エネルギー状態という意味を持つ。

1. の場合は宇宙で一定の構造を持った場所にみられる。太陽黒点、プロミネンス、銀河の渦巻き状アームなどにおける平衡問題に関わると考えられる。また磁場閉じ込め核融合においても、磁気面の存在によりプラズマの拡散を防

ることができるので非常に重要である。

2. の場合もプラズマ物理において非常に重要である。宇宙空間において重力や圧力のエネルギー密度が磁場のエネルギー密度に比べてずっと小さい場合には Beltrami ベクトル場になると考えられる。核融合研究においても、RFP やスフェロマックなどにおいて非常に関係深い。またプラズマの選択的な散逸による自己組織化 (極小エネルギー状態) に深く関わっている。

2.2 極小エネルギー磁場配位

極小エネルギー磁場配位は「Waltjer-Taylor の仮説」によって説明される。それは、磁場のエネルギーを $U(\mathbf{A})$ 、磁場のねじれの総量を表すヘリシティを $H(\mathbf{A})$ とすると、「 $H(\mathbf{A})$ の保存下で $U(\mathbf{A})$ が最小値をとる」というものである。ただしここで \mathbf{A} はベクトルポテンシャルで $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ である。 $U(\mathbf{A})$ 、 $H(\mathbf{A})$ は Ω をプラズマの全領域として、

$$U(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} |\mathbf{B}|^2 dx = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 dx \quad (2.6)$$

$$H(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dx = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dx \quad (2.7)$$

で与えられる。

極小磁場配位を求めるには、未定乗数 μ を用いて自由エネルギー

$$F(\mathbf{A}) = U(\mathbf{A}) - \mu H(\mathbf{A}) \quad (2.8)$$

を定義し、この極小値を計算する。

この変分問題の Euler-Lagrange 方程式は次式のように得られる (付録 B)。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mu \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (2.9)$$

$B = \nabla \times A$ より

$$\nabla \times B = \mu B \quad (2.10)$$

を得る。これは (1.1) 式において $\lambda = \mu = \text{const}$ である場合、つまり一様 Beltrami 関数である。このように一様 Beltrami ベクトル場は極小エネルギー磁場配位であると解釈されている。

「ヘリシティーの保存下でエネルギーが最小値をとる」というプラズマの選択的散逸によって、プラズマは構造をもった状態を形成できる。つまり一様 Beltrami ベクトル場はヘリシティーの束縛下で自己組織化される構造であることが分かる。もしヘリシティーの保存を仮定しないでエネルギー最小磁場を求めると、その Euler-Lagrange 方程式は $\nabla \times B = 0$ となり B は調和ベクトル場、即ちプラズマ中に電流がない真空磁場が解となる。プラズマに電流を流すということは、磁場をねじること、即ちヘリシティーを与えるということである。例えばトカマクでは、トランスの原理による誘導や、円偏波した電磁波でヘリシティーを入射することができる。太陽コロナのループでは、太陽表面のフットポイントの(コリオリの力による)渦運動がループ内の磁力線をねじってヘリシティーが与えられると考えられている。

2.3 二重 Beltrami ベクトル場

MHD 方程式の平衡解の1つとして、Beltrami ベクトル場が導かれる。MHD 方程式はイオンと電子などからなるプラズマを1流体で近似した方程式である。これは系が(イオンの表皮深さに比べて)比較的大きい場合にはよい近似として成立する。ここでは2流体プラズマの平衡解である二重 Beltrami ベク

トル場を求める。この解は 1 流体近似の平衡解である Beltrami ベクトル場も含む解である。そこで先ず電子とイオンそれぞれの速度を \mathbf{v}_e 、 \mathbf{v}_i 、質量を M 、 m 、圧力を p_e 、 p_i 、数密度を $n_e = n_i = n(\text{const})$ とし、さらに電場を \mathbf{E} とし、電子と (1 価) イオンの運動方程式を書くと次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_e + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e = \frac{-e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \frac{1}{mn} \nabla p_e \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_i + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i = \frac{e}{M} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \frac{1}{Mn} \nabla p_i \quad (2.12)$$

ここで、 $m \ll M$ より電子の慣性力 ((2.11) 式の左辺) は無視できる。よって (2.11) 式を書き直すと、

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} + \frac{1}{en} \nabla p_e = 0 \quad (2.13)$$

となる。またプラズマの流れ \mathbf{v} 、電流 \mathbf{j} は \mathbf{v}_i 、 \mathbf{v}_e を用いて

$$\mathbf{v} = \frac{M\mathbf{v}_i + m\mathbf{v}_e}{M + m} \simeq \mathbf{v}_i \quad (2.14)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \quad (2.15)$$

と表せる。さらに次のような無次元化を行う。

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \lambda_i \hat{\mathbf{x}}, & \mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{B}} \\ t = (\lambda_i/V_A) \hat{t}, & p = (B_0^2/\mu_0) \hat{p}, & \mathbf{v} = V_A \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{A} = (\lambda_i B_0) \hat{\mathbf{A}}, & \phi = (V_A \lambda_i B_0) \hat{\phi} \end{cases} \quad (2.16)$$

ここでイオンの表皮深さ (ion skin depth)

$$\lambda_i = \frac{c}{\omega_{pi}} = \frac{V_A}{\omega_{ci}} = \sqrt{\frac{M}{\mu_0 n e^2}} \quad (2.17)$$

はイオンの慣性力が効く長さであり、この系の特徴的長さである。またアルフベン速度は $V_A = B_0/\sqrt{\mu_0 M n}$ で与えられる。ここで B_0 は磁場の代表的な大きさである。

さらに無次元化された静電ポテンシャル $\hat{\phi}$ を用いて、 $\hat{E} = -\partial\hat{A}/\partial\hat{t} - \hat{\nabla}\hat{\phi}$ と書くと (2.13) 式、(2.12) 式は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial\hat{t}}\hat{A} = (\hat{v} - \hat{\nabla} \times \hat{B}) \times \hat{B} - \hat{\nabla}(\hat{\phi} + \hat{p}_e) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{t}}(\hat{v} + \hat{A}) = \hat{v} \times (\hat{B} + \hat{\nabla} \times \hat{v}) - \hat{\nabla}(\hat{V}^2/2 + \hat{p}_i + \hat{\phi}) \quad (2.19)$$

以後、簡単のために $\hat{}$ を省略して書く。(2.18) 式、(2.19) 式の $\text{curl}(\nabla \times)$ をとると、次のような対称形に書くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} w_j - \nabla \times (U_j \times w_j) = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (2.20)$$

ここで、一般化された渦 w_j の組は、

$$w_1 = B, \quad w_2 = B + \nabla \times v,$$

実効的な流れ U_j の組は、

$$U_1 = v - \nabla \times B, \quad U_2 = v.$$

である。(2.20) 式の最も簡単な平衡解は「Beltrami 条件」(2.21) 式によって与えられる。

$$U_j = \mu_j w_j \quad (j = 1, 2) \quad (2.21)$$

つまり w_j と U_j が平行になっている場合である。 $a = 1/\mu_1$ 、 $b = 1/\mu_2$ とすると、(1.3) 式、(1.4) 式を得る。

$$B = a(v - \nabla \times B) \quad (1.3)$$

$$B + \nabla \times v = bv \quad (1.4)$$

(1.3) 式より電子の流れ ($v - \nabla \times B$) は磁場 B に平行であり、その一方 (1.4) 式よりイオンの流れ v は一般化された磁場 ($B + \nabla \times v$) に平行であることが分かる。一般化された磁場には、イオンの慣性力によりもたらされるコリオリ力が含まれている。

a と b が定数の場合 B と v の同次線形方程式となる。さらに、(1.3) 式、(1.4) より v を消去すると、 B に対する 2 次の偏微分方程式 (1.5) 式を得る。

$$\nabla \times (\nabla \times B) + \alpha \nabla \times B + \beta B = 0 \quad (1.5)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{1}{a} - b, \quad \beta = 1 - \frac{b}{a}$$

である。さらに λ_{\pm} を

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-\alpha \pm (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2} \right]. \quad (2.25)$$

とし、 $\nabla \times$ を "curl" と書くと、(1.5) 式は

$$(\text{curl} - \lambda_+)(\text{curl} - \lambda_-)B = 0 \quad (1.6)$$

と書ける。これは $(\text{curl} - \lambda_+)B_+ = 0$ と $(\text{curl} - \lambda_-)B_- = 0$ と表される B_{\pm} の線形結合によって (1.6) 式の解 B を表現できることを意味する。 λ_{\pm} は定数 a と b の値によって変化する。ある a と b の値をとると λ_{\pm} の値が大きくかけ離れた場合を考えることができる。つまりそれは構造が大きく異なり、相関を持つ 2 つの Beltrami ベクトル場の重ねあわせを考えていることになる。 a と b の値によって様々な Beltrami ベクトル場の重ねあわせを考えることができる。

2.4 非一様 Beltrami ベクトル場

仮に λ が一定でない (1.1)-(1.2) 式を満たす滑らかな解があったとする。そうするとその解は磁気面を持たなくてはならない。なぜなら (1.2) 式より、 λ は B に沿って一定でなくてはならない。もし磁気面が存在せず磁力線がある体積を稠密に埋めるとすると、その領域において λ が一定でなくてはならないからである。対称性がある場合については一定でない λ に対しても解がある。それは Grad-Shafranov の方程式を解いて求められる。対称性より磁気面の存在がいて、磁力線の動きをこの磁気面上に束縛できる。よってそれぞれの磁気面上で一定値を持つ λ を考えることができる。対称性と磁気面の存在は密接に関係しており、磁気面が存在するためには対称性を持つことが十分条件である。逆に磁気面がなくエルゴディックな磁場の下では、平衡を特徴付ける関数 λ は一定値に縮退してしまう。全く対称性のない多重連結領域についても任意の複素数 λ について解を持つことが示されているが、対称性を持たず、即ち磁気面を持たず、しかも一定でない λ を持つ、(1.1)-(1.2) 式の解が存在し得るかどうかは分からない。

そこで本研究では非一様 Beltrami ベクトル場として、第 3 章では 2 つの Beltrami ベクトル場が接しておりその境界でジャンプ (不連続) が生じている場合の接続条件を考える。不連続面における接続条件はショックの理論と密接に関係する。そこで接続条件として、MHD 方程式における Rankine-Hugoniot 条件を考える。第 4 章では軸対称である Beltrami ベクトル場の非一様性について考察する。Grad-Shafranov 方程式を無力状態の Beltrami ベクトル場で考えると、磁気面にそって λ が一定という解が示される。そこで 2 つの Beltrami ベクトル場が重なった二重 Beltrami ベクトル場に Grad-Shafranov 方程式を応用

し、大きな構造をもつ Beltrami ベクトル場の中に小さな構造を持つ Beltrami ベクトル場が、局所的なフィラメント状に、つまり孤立した Beltrami 渦管として存在する解の条件について考察する。

第3章 不連続 Beltrami ベクトル場の の接続とショック構造

3.1 双曲型偏微分方程式とショック

3.1.1 非線形波動方程式と不連続波形の形成

波動方程式は双曲型偏微分方程式に属し、初期条件を要する¹。また波動方程式はその初期値が特性曲線に沿って保存することを意味する。ゆえに自由伝播の波は、d'Alembert の解で表されるように任意の初期波形を保存したまま移動する (付録 C)。しかし非線形性が加わると、特性曲線が簡単には求まらないことが多い。あるときには特性曲線が衝突してしまい不連続波形を生じる。これがショックに対応する。

そこで非線形波動方程式として最も単純な例として、Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

を考える。これは対流型の非線形性を表す。(3.1) 式は u が特性曲線、

$$\begin{cases} dx(t)/dt = u(x, t) \\ x(t = 0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

¹ 一般に双曲型偏微分方程式は初期条件に対応する Cauchy のデータを要する。

に沿って保存されることを示している。つまり (3.1) 式は特性曲線上で $u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0$ と初期値のままであることを意味している。よって (3.2) 式は

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(x, t) = u_0 \quad (3.3)$$

のように書ける。したがって $x-t$ 平面に特性曲線を書くと $(x_0, 0)$ を通る特性曲線は傾き u_0 の直線となる。 u_0 が一様でない場合、特性曲線特性曲線が交わる点があられる。例えば、 $x_{01} < x_{02}$ で $u_{01} > u_{02}$ の場合がそうである。その点で u は u_{01} と u_{02} の二つの値を持つことになってしまう (図 3.1)。

図 3.1: 特性曲線の衝突

これは「波の追い越し」意味し、物理的には波形が急峻化し「ショック」が発生することに対応する。この時 u の x に対する変動が大きくなり $\partial u / \partial x$ という微分が破綻してしまう。つまりショックが形成されると (3.1) 式は破綻してしまう。そこで別の方法で解析する必要がある。

現実には波形の急峻化により $\partial^2 u / \partial x^2$ や $\partial^3 u / \partial x^3$ などの高次の微分の効果が効いてきて急峻化は制限される。

- $\partial^2 u / \partial x^2$ (散逸) が効く場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.4)$$

速度 V の移流を含む拡散方程式と関係しており、不可逆過程でショックの形成に関連する。

- $\partial^3 u / \partial x^3$ (分散) が効く場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (3.5)$$

KdV 方程式と関係しており、ソリトンの形成に関連する。

3.1.2 Rankine-Hugoniot 条件

ショックを考える場合狭い領域で急峻化するため散逸項が重要な役割を果たす。そのため ϵ を非常に小さいとして散逸項を加えた (3.6) 式を解かなくてはならない。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.6)$$

しかし u の解を x に関して不連続を持つ場合にも拡張することによって散逸項を無視して考えることができる。つまりショックを散逸項を無限に小さくした極限での不連続関数と見なすのである。しかしこのように不連続関数を許容するように拡張された解は一意ではなくなり、その中から物理的な解を取り出すための条件が必要となる²。

² エントロピー条件、発展性条件など。

以下 u を x に関して不連続を持つ場合にも拡張して考える。1次元の波動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

は $df(u)/du = V(u)$ を用いて

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

と保存則の形に書ける。但し、 u の不連続点では $\partial f(u)/\partial x$ は破綻しているので、 u の滑らかなところで (3.8) 式は成立するものとする。

u の不連続点での時間発展を考えるために $u(x, t)$ を積分した量

$$\mathcal{N}(t) = \int_a^b u(x, t) dx$$

を考える。 $\mathcal{N}(t)$ の時間変化は (3.8) 式より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{N}(t) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(u) dx \\ &= f(u(a, t)) - f(u(b, t)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

を得る。ここで一定速度 C で進行する不連続面を考え、

$$u(x, t) = u(x - Ct) \quad (3.10)$$

とおく。このとき $\partial u/\partial t = -C \partial u/\partial x$ である。これを (3.9) 式に代入すると

$$C\{u(a, t) - u(b, t)\} = f(u(a, t)) - f(u(b, t)) \quad (3.11)$$

となり、不連続面に関する (積分形の) 保存則が得られた。これは不連続の有無に関わらず任意の区間 (a, b) で成立しなくてはならない。

時刻 t で $x = x_s$ に不連続面があるとき、

$$\begin{aligned}u_1 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} u(x_s - \delta, t) \\u_2 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} u(x_s + \delta, t)\end{aligned}$$

を定義すると (3.11) 式より

$$C(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2) \quad (3.12)$$

となる。 $[u] = u_1 - u_2$ で u の不連続面上におけるジャンプを表すと、Rankine-Hugoniot 条件

$$C[u] = [f(u)] \quad (3.13)$$

を得る。(3.13) 式は不連続面の伝搬速度 C とジャンプの関係を与える。つまり、 (u_1, u_2, C) のうち、2つの量が既知の量なら残りの1つは求まる (独立でない) ということが分る (図 3.2)。

図 3.2: Rankine-Hugoniot 条件

しかしこれだけでは (3.8) 式の解を完全に決定することはできない。非線形波動における不連続初期値問題である Riemann 問題を考えると、不連続解と膨張波解が同時に満たされ、解が一意的に定まらないことが分かる (付録 D)。一般に非線形波動方程式の解に不連続性を許すと解は一意的に定まらなくなる。実際の物理現象と合致する解を一意的に選択するためには Rankine-Hugoniot 条件だけでは不十分であり、さらに他の条件を考える必要がある。この問題は、一般に時間の進行に関する非可逆性を考えることで解消される。そのためには 2 次の微分で表される散逸の効果の特異摂動として加えればよい。つまり、(3.6) 式のように ϵ を非常に小さい非負の定数として散逸項を加えればよい。(3.8) 式に散逸項を加えると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

を得る。散逸 (つまり ϵ) が 0 の極限として不連続解を考える。 $\epsilon > 0$ の場合、(3.14) 式は滑らかな一意的な解を持つことが示される。この解を $u_\epsilon(x, t)$ とする³。 ϵ が 0 の極限として

$$u(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x, t) \quad (3.15)$$

とする。

速度 C で伝搬する進行波を考えるために、 $u_\epsilon(x, t) = g((x - Ct)/\epsilon)$ とおく。これを (3.14) 式に代入すると、

$$-Cg' + f(g)' = g'' \quad (3.16)$$

³ 粘性解 (viscosity solution) という。

を得る。但し'は $(x - Ct)/\epsilon$ による微分を表す。また、

$$\begin{cases} g(-\infty, t) = u_1 \\ g(+\infty, t) = u_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

とすると $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で $u_1 - u_2$ は波面 $x = Ct$ における u のジャンプを与える。(3.16) 式を積分すると、 ξ を積分定数として

$$\xi - Cg + f(g)' = g' \quad (3.18)$$

を得る。(3.17) 式、(3.18) 式より

$$\xi = Cu_1 - f(u_1) = Cu_2 - f(u_2) \quad (3.19)$$

を得る。したがって Rankine-Hugoniot 条件

$$C[u] = [f(u)] \quad (3.13)$$

を得る。

しかし Rankine-Hugoniot 条件だけでは (3.8) 式の解は一意に定まらない。そこでさらに u_2 と u_1 の接続が単調であることを要請する。つまり $u_2 > u_1$ の場合には $g' > 0$ 、 $u_2 < u_1$ の場合には $g' < 0$ とする。この条件を (3.18) 式に用いると、

$u_2 > u_1$ の場合、

$$\frac{f(u_2) - f(u)}{u_2 - u} < C = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} < \frac{f(u) - f(u_1)}{u - u_1} \quad (u_1 \leq \forall u \leq u_2) \quad (3.21)$$

$u_2 < u_1$ の場合、

$$\frac{f(u) - f(u_2)}{u - u_2} < C = \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} < \frac{f(u_1) - f(u)}{u_1 - u} \quad (u_2 \leq \forall u \leq u_1) \quad (3.22)$$

が満たされなくてはならない。この条件をエントロピー条件 (entropy condition) という。

この条件を Burgers 方程式、つまり $f(u) = u^2/2 + (\text{const})$ の場合に用いると $u_2 < u_1$ の場合、不連続解はエントロピー条件を満たす。しかし $u_2 > u_1$ の場合の不連続解はエントロピー条件を満足しない。この場合膨張波解は連続であるから、エントロピー条件は自明となる。よって初期条件が $u_2 < u_1$ の場合は不連続波面が存続し、 $u_2 > u_1$ の場合は不連続波面は存続できず、膨張し解消してしまう。つまり圧縮性のときに不連続波形は存続することが分かる。

またこのとき、(3.13) 式より、

$$C = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (3.23)$$

なので、ショック解が存在する条件、 $u_2 < u_1$ を考えると

$$\begin{cases} u_1 > C \\ u_2 < C \end{cases} \quad (3.24)$$

であることが分かる。

3.1.3 発展性条件

MHD におけるショックはエントロピー増大則によって膨張型の解は除外されるが、解が一意に定まらないという事態がおきる。この場合、エントロピー増大則だけでは不十分であり、発展性条件を考えることで解が一意に定まることが知られている。発展的であるとは「微小振動を加えた場合その後の変化も微小のままである」ことを言う。物理的に次のように言うことができる。微小振幅の入射波を入れたときに、その作用でショック面が微小振動しそ

の変動が外向波として出ていく。そのとき任意の入射波に対して、それに応じたショック面の微小振動と外向波が一意に定まらなくてはならない。

具体的に発展性条件を考えるために、まず n 次元の双曲型偏微分方程式、(3.25) 式を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = 0 \quad (3.25)$$

\mathcal{A} は $n \times n$ マトリクスである。また $\mathcal{A} = \nabla_u \mathbf{F} (A_{ji} = \partial F_j / \partial u_i)$ を用いて (3.25) 式は保存則の形 (3.26) 式に書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} = 0 \quad (3.26)$$

一定速度 C で動くショック面を考えると、(3.26) 式より Rankine-Hugoniot 条件 (3.27) 式を得ることができる。

$$C[\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] \quad (3.27)$$

ここで $[u] = u_1 - u_2$ はショック面両側の値のジャンプを表す。(3.27) 式より領域 1、または領域 2 の値のどちらか一方と C が与えられれば、もう一方の値が求まる。しかし非線形の場合には一意に決まらない。

一意に決める条件としてここで発展性条件を考える。任意の入射波に対し、それに応じて、ショック面の微小振動と外向波が双曲型保存場 (3.25) 式によって一意に決まらなくてはならない。そこでまず不連続領域で (3.27) 式を、その他の領域で (3.26) 式を満たす解を \mathbf{U}_0 とし、ガリレイ変換によってショックにのった座標系 $\hat{x} = x - Ct$ 、 $\hat{t} = t$ に移る。ショック面は $\hat{x} = 0$ にあるとして、 \mathbf{U}_0 を

$$\mathbf{U}_0 = \begin{cases} \mathbf{U}_{01} & (\hat{x} < 0) \\ \mathbf{U}_{02} & (\hat{x} > 0) \end{cases} \quad (3.28)$$

とする。また U_0 は (3.27) 式を満たすので、 $\hat{x} = 0$ 、つまりショック面上で

$$[F_0 - CU_0] = 0 \quad (3.29)$$

を満たす。ただし $F_0 = F(U_0)$ である。

ガリレイ変換によって (3.26) 式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (-CU + F) = 0 \quad (3.30)$$

となる。また以後、簡単のために \hat{x} を省略して書く。ここで U_0 に対して微小変動 (摂動) δU を考え、

$$U = U_0 + \delta U \quad (3.31)$$

とする。 δU は入射波と外向波の重ね合わせである。ゆらぎ δU にともなうショック面のゆれを δx 、その速度を δC とすると、 U はショック面上 ($x = 0$) で (3.30) 式より、

$$\delta C[U] = [F - CU] \quad (3.32)$$

を満たす。以上より摂動を加えた U が $x = 0$ 、 $x \neq 0$ で満たす式が、それぞれ (3.32) 式、(3.30) 式として得られた。次にこれらの式を線形化する。

$$F \simeq F(U_0) + \nabla_u F \delta U = F_0 + \mathcal{A} \delta U$$

と (3.29) 式より、 $x = 0$ で (3.32) 式は、 $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - C I$ として、

$$\delta C[U_0] = [\tilde{\mathcal{A}} \delta U] \quad (3.33)$$

と書ける。また $x \neq 0$ で (3.30) 式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta U + \tilde{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial x} \delta U = 0 \quad (3.34)$$

となる。

いま、外から入れたゆらぎ (入射波) がある一定の角周波数 ω で振動しているとき、

$$\delta C = \delta s \exp\{i\omega t\} \quad (3.35)$$

と書くことができる。また入射波と外向波の重ね合わせである δU は、 \tilde{A} の固有値を $\tilde{\lambda}^{(\alpha)}$ 、それに対応する固有ベクトルを $\tilde{R}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) とすると、

$$\delta U_j = \sum_{\alpha=1}^n \delta a_j^{(\alpha)} \tilde{R}_j^{(\alpha)} \exp\{i\omega(t - \frac{x}{\tilde{\lambda}_j^{(\alpha)}})\} \quad (j = 1, 2) \quad (3.36)$$

と書くことができる。以上より、(3.33) 式、(3.34) 式を満たす解を得るためには、 δU_1 、 δU_2 を $x = 0$ で (3.35) 式、(3.36) 式を満たすようにつなげばよい。

任意の入射波に対して外向波が一意に決まる条件を求めるために、(3.36) 式で表される δU_j を入射波と外向波に分けて考えてみる。入射波は $x < 0$ で $\tilde{\lambda}_1^{(\alpha)} > 0$ 、 $x > 0$ で $\tilde{\lambda}_2^{(\alpha)} < 0$ である。一方外向波は $x < 0$ で $\tilde{\lambda}_1^{(\alpha)} < 0$ 、 $x > 0$ で $\tilde{\lambda}_2^{(\alpha)} > 0$ である (図 3.3)。

図 3.3: 外向波

入射波と外向波をそれぞれ in 、 out の添字をつけ、外向波の数を f_j として (3.36) 式を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \delta U_j = & \sum_{\alpha=1}^{f_j} \delta a_{j,out}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{R}}_{j,out}^{(\alpha)} \exp\{i\omega(t - \frac{x}{\tilde{\lambda}_{j,out}^{(\alpha)}})\} \\ & + \sum_{\alpha=1}^{n-f_j} \delta a_{j,in}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{R}}_{j,in}^{(\alpha)} \exp\{i\omega(t - \frac{x}{\tilde{\lambda}_{j,in}^{(\alpha)}})\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

この δU_j と (3.35) 式の δC を $x = 0$ で (3.33) 式に代入する。

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{R}}^{(\alpha)} = \tilde{\lambda}^{(\alpha)}\tilde{\mathbf{R}}^{(\alpha)}$$

より、 $f = f_1 + f_2$ とすると、

$$\begin{aligned} \delta s \exp\{i\omega t\}[U_0] &= \{\tilde{\mathbf{A}}\delta U_1 - \tilde{\mathbf{A}}\delta U_2\} \\ &= (-\sum_{\alpha=1}^{f_1} |\tilde{\lambda}_{1,out}^{(\alpha)}| \delta a_{1,out}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{R}}_{1,out}^{(\alpha)} \exp\{i\omega t\} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{n-f_1} |\tilde{\lambda}_{1,in}^{(\alpha)}| \delta a_{1,in}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{R}}_{1,in}^{(\alpha)} \exp\{i\omega t\}) \\ &\quad - (\sum_{\alpha=1}^{f_2} |\tilde{\lambda}_{2,out}^{(\alpha)}| \delta a_{2,out}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{R}}_{2,out}^{(\alpha)} \exp\{i\omega t\} \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^{n-f_2} |\tilde{\lambda}_{2,in}^{(\alpha)}| \delta a_{2,in}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{R}}_{2,in}^{(\alpha)} \exp\{i\omega t\}) \\ &= -\sum_{\alpha=1}^f |\tilde{\lambda}_{out}^{(\alpha)}| \delta a_{out}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{R}}_{out}^{(\alpha)} \exp\{i\omega t\} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{2n-f} |\tilde{\lambda}_{in}^{(\alpha)}| \delta a_{in}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{R}}_{in}^{(\alpha)} \exp\{i\omega t\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。よって、

$$\sum_{\alpha=1}^f |\tilde{\lambda}_{out}^{(\alpha)}| \delta a_{out}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{R}}_{out}^{(\alpha)} + \delta s[U_0] = \sum_{\alpha=1}^{2n-f} |\tilde{\lambda}_{in}^{(\alpha)}| \delta a_{in}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{R}}_{in}^{(\alpha)} \quad (3.39)$$

を得る。(3.39) 式は、任意の入射波に対して $\delta a_{out}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, \dots, f$) と δs の $f + 1$ 個の未知量に対する代数方程式である。この方程式の解が求まる条件として発展性条件が要求される。それは、「未知数 ($f + 1$ 個) が n 個、つまり外向波の数 (f 個) が $n - 1$ 個で、かつベクトル $\tilde{R}_{out}^{(\alpha)}$ と $[U_0]$ が線形独立である」ということである。

最も単純な例として、Burgers 方程式 (3.1) 式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

を考える。 $n = 1$ で $\tilde{\lambda}^1 = \tilde{u} (= u - C)$ なので、 $f = 0$ 、つまり外向波がない条件を考えると、

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1^1 = \tilde{u}_1 > 0 & (x < 0) \\ \tilde{\lambda}_2^1 = \tilde{u}_2 < 0 & (x > 0) \end{cases} \quad (3.41)$$

を得る。これはエントロピー条件より求めた (3.24) 式と一致する。

また気体におけるショックを考えると、発展性条件とエントロピー増大則が同等であることが分かる (付録 E)。しかし明らかにこの 2 つの条件は性質 (物理) が異なる。実際、MHD における遅い磁気音波のショックに対しては、エントロピー増大則が成立しても発展性条件を満たさないことがある。しかし発展性条件を満たせば、エントロピー増大則も満たすことが証明されている。

3.2 Beltramiベクトル場の平衡解

Beltramiベクトル場の平衡解として (3.42) 式を考える。

$$\mathbf{B}(x, t) = B \begin{pmatrix} 0 \\ e^{ik(x-vt)} \\ ie^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

但し、 B, k, v は全て定数とする。これは MHD 方程式を満たし、位置 x と時間 t のみに依存する (図 3.4)。

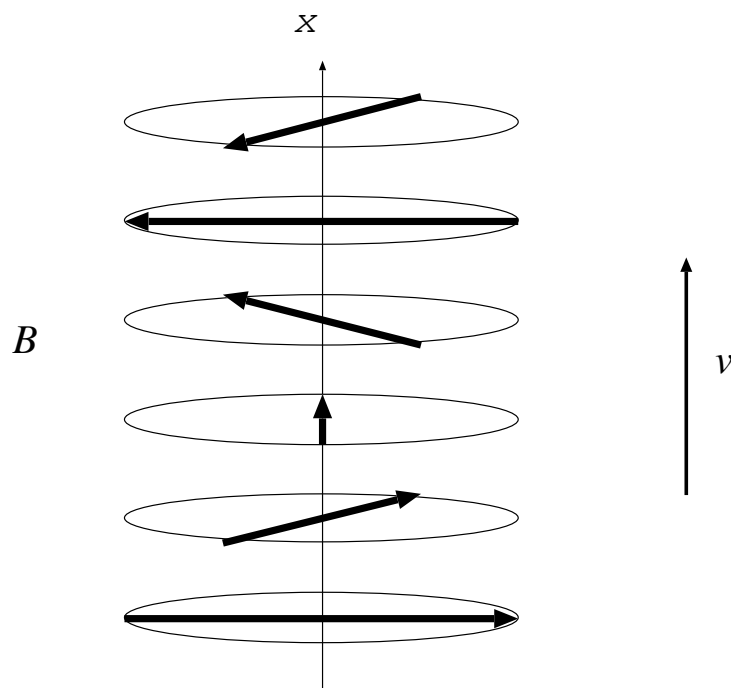


図 3.4: Beltrami ベクトル場

(3.42) 式は以下の MHD 方程式を満足する。

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.44)$$

$$\rho\left\{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right\} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (3.45)$$

但し、 $p = \text{const}(\nabla p = 0)$ とする。さらに (3.42) 式は

$$\nabla \times \mathbf{B} = ikB \begin{pmatrix} 0 \\ -ie^{ik(x-vt)} \\ e^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} = kB \begin{pmatrix} 0 \\ e^{ik(x-vt)} \\ ie^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} = k\mathbf{B} \quad (3.46)$$

となり、Beltrami 条件も満足している。

3.3 プラズマ物理における保存則

本研究では、 k, B, v が x 軸上に不連続点をもつ場合の条件を求める。 k, B, v にジャンプがある際、MHD 方程式 (3.43) 式～(3.45) 式を積分形である Rankine-Hugoniot の式に書き直さなくてはならない。

ここでは、field1、field2 で各々平衡解 (B, k, v は定数) が成立しており、接続面に不連続が生じている場合の条件を考える。つまり領域 1、領域 2 では各々微分形式の MHD 方程式 (3.43) 式～(3.45) 式を満足するが不連続面では破綻してしまう。そこで、積分形式の MHD 方程式、つまり Rankine-Hugoniot 条件を用いて接続条件を求める。

一般に、Rankine-Hugoniot 条件は C を不連続面の速さとする、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

において、 $u(x, t)$ を積分した量

$$\mathcal{N}(t) = \int_a^b u(x, t) dx$$

の時間変化を考えることによって、 $[u] = u_1 - u_2$ で u の不連続面上におけるジャンプを表すと、

$$C[u] = [f(u)] \quad (3.13)$$

のように表される。そこでまず MHD 方程式を (3.8) 式のような (divergence form の) 保存則で表す必要がある。

(3.43)~(3.45) 式は $\rho(p)$ 、 \mathbf{v} 、 B の 7 つの未知変数に対する方程式である。但し、ここで方程式が閉じるためには、状態方程式によって ρ と p を関係づける必要がある。そこで等エントロピー変化を考えると、比熱比 γ を用いて、

$$p = c\rho^\gamma \quad (3.49)$$

と書ける。ここで c は正の定数である⁴。これを用いて、(3.43) 式を書き直すと、

$$\frac{\partial}{\partial t} p + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.50)$$

を得る。

気体 (一般流体) における保存則 (付録 E) とのアナロジーから、運動方程式 (3.45) 式、状態方程式 (3.49) 式またはそれと等価な (3.50) 式を運動量保存則、エネルギー保存則の形に書きかえたい。

まず、運動量保存則を考える。プラズマ中の任意の領域 Ω (境界 $\partial\Omega$) に働く力は電磁力、

$$\int_{\Omega} \mathbf{j} \times \mathbf{B} dx$$

⁴ c は流線に沿って時間的に一定である。空間的に一定ではない。

と圧力

$$-\int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} dS = -\int_{\Omega} \nabla p dx$$

である。ここで \mathbf{n} は境界 $\partial\Omega$ の外向単位法線ベクトルである。ここでグリーンの公式を用いた。また境界を通して単位時間に流入する流体がもたらす運動量は、

$$-\int_{\partial\Omega} \rho v_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) dx \quad (i = x, y, z)$$

と表せる。ここでもグリーンの公式を用いた。領域 Ω 内の単位時間当たりの運動量の増加は、これらの和に等しい。よって、

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) + \nabla p \right\} dx = 0 \quad (3.51)$$

が成り立つ。(3.51) 式は任意の領域 Ω について成り立つので、運動量保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = 0 \quad (i = x, y, z) \quad (3.52)$$

となる。またはテンソル積 (\otimes) を用いて、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \mu^{-1} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nabla p = 0 \quad (3.53)$$

と書ける。これはベクトル公式

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})) \mathbf{v}$$

と質量保存則 (3.43) 式より、運動方程式 (3.45) 式に書き直せる。

次に、エネルギー保存則を導く。(3.45) 式の両辺に $\mathbf{v} \cdot$ をかける。左辺は、

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{v^2}{2} + \rho \mathbf{v} \cdot \left(\nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} - \frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \left(\frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} \right) - \frac{v^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \end{aligned}$$

質量保存則 (3.43) 式より、

$$\frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{v^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

よって、

$$\rho \mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} \right) \quad (3.54)$$

となる。右辺第1項は、

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right\} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \\ &= \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right\} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$

誘導方程式より、

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= -\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{2\mu_0} \end{aligned}$$

よって、

$$\mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right\} = \nabla \cdot \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (3.55)$$

となる。また、

$$\gamma \nabla \cdot (p \mathbf{v}) = \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} + \gamma \mathbf{v} \cdot \nabla p$$

より (3.50) 式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} p + (1 - \gamma) \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma \nabla \cdot (p \mathbf{v}) = 0$$

と書ける。よって右辺第2項は、

$$\mathbf{v} \cdot \nabla p = \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{1 - \gamma} + \nabla \cdot \left(\frac{\gamma p}{\gamma - 1} \mathbf{v} \right) \quad (3.56)$$

となる。以上より (3.54) 式、(3.55) 式、(3.56) 式の和をとると、次式のエネルギー保存則が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma-1} \right) \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right\} = 0 \quad (3.57)$$

運動方程式、状態方程式を運動量保存則、エネルギー保存則で書き換えると、結局、プラズマ中の保存則 (MHD 方程式) は

- 質量保存則 (連続の式)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.58)$$

- 運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \mu_0^{-1} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nabla p = 0 \quad (3.59)$$

- エネルギー保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma-1} \right) \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right\} = 0 \quad (3.60)$$

- 誘導方程式 (induction equation)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (3.61)$$

のように書くことができる。ここで、(3.42) 式を (3.58)~(3.61) 式に代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \rho v^2 + p \right) = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{B^2}{\mu_0} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) v \right\} = 0 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_y + \frac{\partial}{\partial x} (v B_y) = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_z + \frac{\partial}{\partial x} (v B_z) = 0 \quad (3.66)$$

以上の (3.62)~(3.66) 式により、MHD 方程式を (3.8) 式の形に書くことができた。したがって、それぞれの変数の積分をとり ($\mathcal{N}(t)$ に対応)、その時間変化を計算することによって Rankine-Hugoniot 条件を得ることができる。

3.4 Beltramiベクトル場における Rankine-Hugoniot 条件

不連続面がある場合、微分形式の保存則 (3.62)~(3.66) 式は成立しない。そこで、3.1.2 小節における導出と同様の方法で、(3.62)~(3.66) 式から Rankine-Hugoniot 条件を求めると、

$$C[\rho] = [\rho v] \quad (3.67)$$

$$C[\rho v] = \left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \rho v^2 + p \right] \quad (3.68)$$

$$C\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right] = \left[\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) v \right] \quad (3.69)$$

$$C[B_y] = [v B_y] \quad (3.70)$$

$$C[B_z] = [v B_z] \quad (3.71)$$

を得る。ここで不連続面の両側の量をそれぞれ添字 1、2 をつけて表し、 $[u] = u_1 - u_2$ は u の不連続面上におけるジャンプを表すとする。

(3.70)、(3.71) 式より

$$\frac{B_{y1}}{B_{y2}} = \frac{B_{z1}}{B_{z2}} = \frac{v_2 - C}{v_1 - C} \quad (3.72)$$

となり、 B_1 と B_2 は不連続面上で平行であることが分かる。そこで B_1 と B_2 が不連続面上で常に平行である条件、つまりスリップしない条件を考える。ここで B_1 と B_2 がスリップするとは、不連続面上で平行からずれて、図 3.5 のようになることを言う。

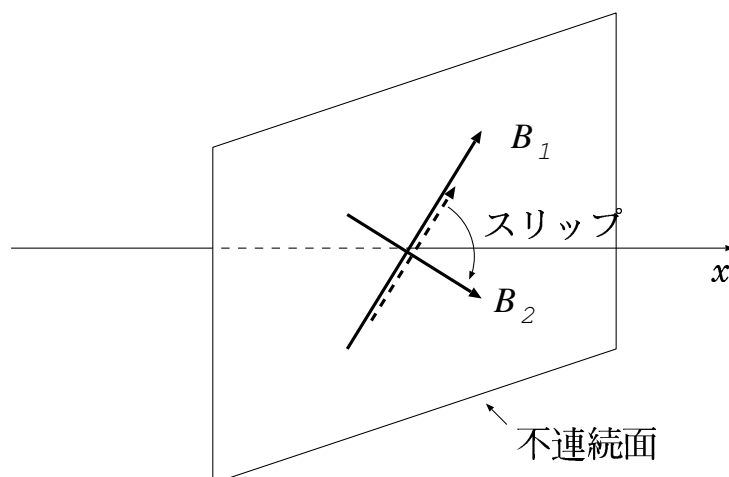


図 3.5: B_1 と B_2 のスリップ

スリップしない条件を得るために、不連続面と共に速度 C で進む座標系 \hat{x} で考え、不連続面は $\hat{x} = 0$ にあるものとする。このとき、 $\hat{x} \neq 0$ では (3.62)~(3.66) 式、 $\hat{x} = 0$ では (3.67)~(3.71) 式が成立するものとする。

$\hat{x} = x - Ct$ 、つまり $x = \hat{x} + Ct$ を (3.42) 式の B に代入する。

$$\begin{aligned} e^{ik(x-vt)} &= e^{ik(\hat{x}-(v-C)t)} \\ &= e^{i(k\hat{x}-\hat{\omega}t)} \end{aligned} \quad (3.73)$$

ここで $\omega = kv$ 、 $\hat{\omega} = k(v - C)$ とすると、座標変換によって $\omega \rightarrow \hat{\omega}$ にドップラーシフトすることが分かる。よって、不連続面上 ($\hat{x} = 0$) で B_1 と B_2 がスリップしないためには、

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_1 &= \hat{\omega}_2 \\ \longrightarrow k_1(v_1 - C) &= k_2(v_2 - C)\end{aligned}$$

つまり

$$C[k] = [vk] \quad (3.74)$$

である必要がある。この条件を (3.70)、(3.71) 式に代入する。

まず y 成分を計算する。(3.70) 式は

$$\begin{aligned}C\{B_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} - B_2 e^{i(k_2 x - \omega t)}\} \\ = \{v_1 B_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} - v_2 B_2 e^{i(k_2 x - \omega t)}\}\end{aligned} \quad (3.75)$$

と書け、

$$e^{ik(x-vt)} = e^{i(k\hat{x} - \hat{\omega}t)}$$

より、

$$\begin{aligned}C\{B_1 e^{i(k_1 \hat{x} - \hat{\omega} t)} - B_2 e^{i(k_2 \hat{x} - \hat{\omega} t)}\} \\ = \{v_1 B_1 e^{i(k_1 \hat{x} - \hat{\omega} t)} - v_2 B_2 e^{i(k_2 \hat{x} - \hat{\omega} t)}\}\end{aligned} \quad (3.76)$$

と書くことができる。両辺を $e^{-i\hat{\omega}t}$ で割ると、

$$C\{B_1 e^{ik_1 \hat{x}} - B_2 e^{ik_2 \hat{x}}\} = \{v_1 B_1 e^{ik_1 \hat{x}} - v_2 B_2 e^{ik_2 \hat{x}}\} \quad (3.77)$$

となる。よって、不連続面上 ($\hat{x} = 0$) では、

$$C\{B_1 - B_2\} = \{v_1 B_1 - v_2 B_2\} \quad (3.78)$$

を得る。同様に z 成分を計算すると

$$C\{B_1 i e^{ik_1 \hat{x}} - B_2 i e^{ik_2 \hat{x}}\} = \{v_1 B_1 i e^{ik_1 \hat{x}} - v_2 B_2 i e^{ik_2 \hat{x}}\} \quad (3.79)$$

となり、不連続面上 ($\hat{x} = 0$) を考えると、

$$Ci\{B_1 - B_2\} = i\{v_1 B_1 - v_2 B_2\} \quad (3.80)$$

を得る。よって、不連続面上 ($\hat{x} = 0$) において

$$C\{B_1 - B_2\} = \{v_1 B_1 - v_2 B_2\} \quad (3.81)$$

であることが分かる。つまり

$$C[B] = [vB] \quad (3.82)$$

がいえる。

以上より、 B_1 と B_2 が不連続面上でスリップしない条件を用いて、2 自由度である B を (B_y, B_z) から (B, k) を用いた表現に書き換えることができた⁵。

以上得られた Rankine-Hugoniot 条件をまとめると、

$$C[\rho] = [\rho v] \quad (3.83)$$

$$C[\rho v] = \left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \rho v^2 + p \right] \quad (3.84)$$

$$C\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right] = \left[\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) v \right] \quad (3.85)$$

$$C[B] = [vB] \quad (3.86)$$

$$C[k] = [vk] \quad (3.87)$$

⁵ デカルト座標から極座標への変換である。

(3.83) ~ (3.86) 式は真空磁場における Rankine-Hugoniot 条件に等価である。Beltrami ベクトル場の構造、つまりねじれの強さを表す k のジャンプ条件は (3.87) 式であり、これは (3.83) ~ (3.86) 式と独立である。よって、(3.83) ~ (3.86) 式を解くことで k のジャンプの大きさを求めることができる。

3.5 解の導出とその性質

3.5.1 Rankine-Hugoniot 条件の簡素化

(3.83) ~ (3.87) 式を解くかわりに $C = 0$ とした (3.88) ~ (3.92) 式を解けばよい。

$$[\rho v] = 0 \quad (3.88)$$

$$\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \rho v^2 + p \right] = 0 \quad (3.89)$$

$$\left[\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) v \right] = 0 \quad (3.90)$$

$$[vB] = 0 \quad (3.91)$$

$$[vk] = 0 \quad (3.92)$$

(3.83) ~ (3.86) 式をガリレイ変換すると (3.88) ~ (3.92) 式が得られるので一般性を失うことはない。

3.5.2 接触不連続面

(3.88) ~ (3.92) 式において、 $v_1 = v_2 = 0$ の場合、つまり不連続面を横切る流れが無い場合これを接触不連続面という。この場合、 ρ, p, B, k にどんな不連続

性があっても、(3.88) 式、(3.90) 式、(3.91) 式、(3.92) 式は満たされる。(3.89) 式に $v_1 = v_2 = 0$ を考慮すると、

$$\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + p\right] = 0$$

つまり、

$$\frac{B_1^2}{2\mu_0} + p_1 = \frac{B_2^2}{2\mu_0} + p_2$$

となり、領域 1 と領域 2 の全圧が等しいことが要求される。よって接触不連続面として、全圧が等しい場合に不連続解が存在することが分かる。

3.5.3 ショック解

流れが不連続面を横切る場合を一般にショックという。 $v_1 \neq 0$ 、 $v_2 \neq 0$ とする。(3.88)、(3.91)、(3.92) 式より、

$$X = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad (3.93)$$

$$Y = \frac{p_2}{p_1} \quad (3.94)$$

とする。また、 $\beta_1 = p_1 / \frac{B_1^2}{2\mu_0}$ 、音速 $a_1 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}$ 、マッハ数 $M_1 = v_1 / a_1$ とする。さらに、 $\alpha = \beta_1^{-1} = (\gamma/2) (V_{A1}^2 / a_1^2)$ を定義する。但し、 $V_{A1} = \sqrt{B_1^2 / \rho_1 \mu_0}$ はアルフベン速度である。(3.89) 式より

$$\gamma M_1^2 (1 - X^{-1}) = (Y - 1) + \alpha (X^2 - 1) \quad (3.95)$$

したがって

$$Y = \gamma M_1^2 (1 - X^{-1}) - \alpha (X^2 - 1) + 1 \quad (3.96)$$

(3.90) 式より

$$M_1^2(1 - X^{-2}) = \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{Y}{X} - 1 \right) + \frac{4\alpha}{\gamma} (X - 1) \quad (3.97)$$

$X \neq 1, Y \neq 1$ の正根を求める ($\alpha = 0$ とすると気体と同じ)(付録 E)。(3.96) 式を (3.97) 式に代入すると

$$(X - 1) \left[\alpha(\gamma - 2)X^2 - \left\{ \gamma(\alpha + 1) + \frac{(\gamma - 1)\gamma}{2} M_1^2 \right\} X + \frac{(\gamma + 1)\gamma}{2} M_1^2 \right] = 0 \quad (3.98)$$

$X \neq 1$ より

$$\alpha(\gamma - 2)X^2 - \left\{ \gamma(\alpha + 1) + \frac{(\gamma - 1)\gamma}{2} M_1^2 \right\} X + \frac{(\gamma + 1)\gamma}{2} M_1^2 = 0 \quad (3.99)$$

通常 $\gamma < 2$ (理想気体では $\gamma = 5/3$) より (3.99) 式は解を持つ。

$$L = \gamma(\alpha + 1) + \frac{(\gamma - 1)\gamma}{2} M_1^2$$

とすると、 $X > 0$ より

$$X = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 2\alpha(2 - \gamma)(\gamma + 1)\gamma M_1^2}}{2\alpha(2 - \gamma)} \quad (3.100)$$

$$Y = 1 + \alpha + \gamma M_1^2(1 - X^{-1}) - \alpha X^2 \quad (3.101)$$

を得る。

3.5.4 物理的な解の選択

エントロピー増加の条件より、ショックは圧縮性の解のみが物理的な解として存在することが証明できる。圧縮性 ($\rho_1 < \rho_2$) より $X > 1$ を考慮すると、

(3.99) 式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\gamma + 1)\gamma M_1^2 &> \alpha(2 - \gamma) + \gamma(\alpha + 1) + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\gamma M_1^2 \\ \frac{1}{2}(\gamma + 1)\gamma M_1^2 &> 2\alpha + \gamma + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\gamma M_1^2 \\ \gamma M_1^2 &> 2\alpha + \gamma\end{aligned}\tag{3.102}$$

であることが分かる。また $M_1^2 = v_1^2/a_1^2$ 、 $\alpha = (\gamma/2)(V_{A1}^2/a_1^2)$ なので、結局、圧縮性 (エントロピー増加) の条件として

$$v_1^2 > V_{A1}^2 + a_1^2 = a_{m1}^2\tag{3.103}$$

を得る。ここで $a_{m1} = \sqrt{V_{A1}^2 + a_1^2}$ は磁気音波 (magnetosonic wave) である。またこのとき、

$$v_2^2 < V_{A2}^2 + a_2^2 = a_{m2}^2\tag{3.104}$$

となる。

次に発展性条件を考える。(3.34) 式におけるマトリクス \tilde{A} の固有値 $\tilde{\lambda}^{(\alpha)}$ を求めることはプラズマ中の波動を求めることに対応する。一般に、プラズマ中において (x 方向) 1 次元的流れを v とすると、位相速度が $v \pm V_{Ax}$ の 2 つのアルフベン波、 $v \pm V_f$ 、 $v \pm V_s$ の 4 つの磁気音波 (速進波と遅進波)、 v のエントロピー波の計 7 個の波が得られる (付録 F)。任意の微小振動はこの 7 個の波により合成されることになる。つまりこの場合、 $n = 7$ なので外向波の数が $n - 1 = 6$ 個となればよい (3.1.3 小節)。

但し、ここで注意が必要である。 x 軸にそって速度 C で進むショック面に微小変動 δC があると、 δC は δv_x に影響を及ぼす。したがって δv_x に関係なく伝わるアルフベン波は δC の影響を受けない。残りの 5 個の波は δv_x の影響を受

ける⁶。よって、微小な入射波に対して、未知量がショック面の微小振動 δC さらには外向波としてアルフベン波が 2 個その他の波が 4 個の計 6 個というものに対して代数方程式が成立し、初期値問題が成立する。つまりそのような場合、発展的となる。

領域 1、領域 2 における波の位相速度は

$$\begin{cases} v_{ph1} = v_1, v_1 \pm V_{Ax1}, v_1 \pm V_{f1}, v_1 \pm V_{s1} \\ v_{ph2} = v_2, v_2 \pm V_{Ax2}, v_2 \pm V_{f2}, v_2 \pm V_{s2} \end{cases}$$

である。そのうち、それぞれ $v_{ph1} < 0, v_{ph2} > 0$ のとき外向波となる。外向波としてアルフベン波が 2 個その他の波が 4 個の計 6 個となる領域を調べると図 3.6 の斜線部となる。図中の数字は外向波の数で前の数がアルフベン波の数、後ろの数がその他の波の数を表す。よって、発展的な領域として $v_1 > V_{f1}, v_2 < V_{f2}$ である速進衝撃波 (fast shock wave)、 $v_1 > V_{s1}, v_2 < V_{s2}$ である遅進衝撃波 (slow shock wave) を得る。

(3.42) 式で表される体系における波動は、 $B_x = 0$ であるため、つまり波の進行方向 (k) と磁場 (B) が垂直であるため、

$$V_s \rightarrow 0, \quad V_{Ax} \rightarrow 0, \quad V_f \rightarrow a_m (\text{磁気音波})$$

となる。つまり遅進衝撃波は存在せず、速進衝撃波のみが存在し、その条件は $v_1 > a_{m1}, v_2 < a_{m2}$ となり、エントロピー増加の条件 (圧縮性の条件) より求めた (3.103) 式、(3.104) 式と一致する。

⁶ エントロピーはエネルギーを含むため影響をうける。

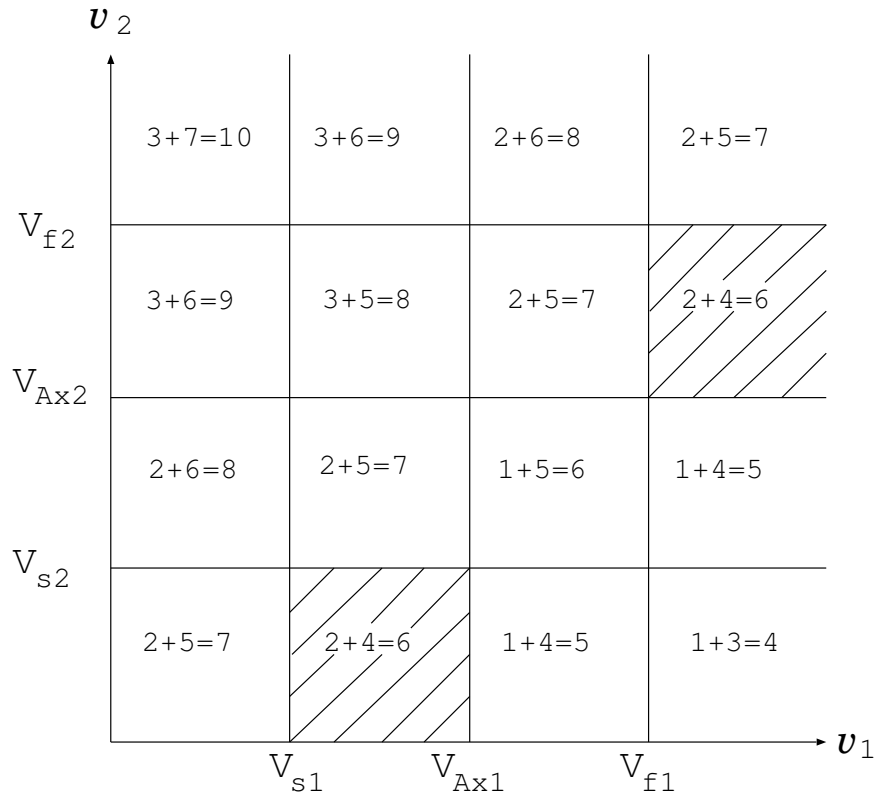


図 3.6: MHD のショックにおける発展的領域

3.5.5 磁場の効果

気体におけるショック、つまり $B = 0, \alpha = 0$ の場合 (付録 E) との比較をして、ショックにおける磁場の効果を考える。

気体の場合の (3.93) 式、(3.94) 式を X_g, Y_g と表すと、(3.99) 式に対応する式として次式を得る。

$$-\left\{\gamma + \frac{(\gamma - 1)\gamma}{2} M_1^2\right\} X_g + \frac{(\gamma + 1)\gamma}{2} M_1^2 = 0$$

これと (3.99) 式との差をとると

$$\left\{ \gamma + \frac{(\gamma - 1)\gamma}{2} M_1^2 \right\} (X - X_g) = -\alpha X \{ (2 - \gamma)X + \gamma \}$$

を得る。ここで $\alpha > 0, X > 0, \gamma < 2$ より $X < X_g$ となる。つまり磁場の効果により、ショックにおけるジャンプ比 (X, Y) が小さくなるということが分かる。

3.6 流れを持つ Beltrami ベクトル場のショック

$y - z$ 成分に (3.42) 式の B と平行な流れを持つ場合について考える。速度を

$$\mathbf{v}(x, t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ V e^{ik(x-vt)} \\ V i e^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

とする。但し、 $V = \text{const}$ とする。(3.42) 式の B と (3.105) 式の v を MHD 方程式 (3.43)~(3.45) 式に代入する。 $v_x = v = \text{const}, \rho = \text{const}$ より (3.43) 式を満たすことは即座に分かる。また、

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ikvB e^{ik(x-vt)} \\ kvB e^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ivB e^{ik(x-vt)} \\ vB e^{ik(x-vt)} \end{pmatrix}$$

より、

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ikvB e^{ik(x-vt)} \\ kvB e^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

よって (3.44) 式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.44)$$

を満たす。

次に (3.45) 式において、

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \nabla \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$$

より、両辺の $\text{curl}(\nabla \times)$ をとると渦度を $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ として、渦度方程式

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \right\} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \{ (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \} \quad (3.109)$$

を得る。ここで $\nabla \times \mathbf{B} = k \mathbf{B}$ より右辺は 0 となる。

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ kV e^{ik(x-vt)} \\ ikV e^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} \quad (3.110)$$

より

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ik^2 v V e^{ik(x-vt)} \\ k^2 v V e^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} \quad (3.111)$$

また

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ikvV e^{ik(x-vt)} \\ kvV e^{ik(x-vt)} \end{pmatrix}$$

より、

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ik^2 v V e^{ik(x-vt)} \\ k^2 v V e^{ik(x-vt)} \end{pmatrix} \quad (3.112)$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

となり、渦度方程式 (3.109) 式を満足する。以上より (3.42) 式の B と (3.105) 式の v は MHD 方程式の解であることが示された。

次に、この B と v をプラズマの保存則 (3.58)~(3.61) 式に代入すと次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) = 0 \quad (3.113)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \rho v_x^2 + p \right) = 0 \quad (3.114)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_y v_x) = 0 \quad (3.115)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_z) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_z v_x) = 0 \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{B^2}{\mu_0} + \frac{\rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) v_x \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_y + \frac{\partial}{\partial x} (v_x B_y) = 0 \quad (3.118)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_z + \frac{\partial}{\partial x} (v_x B_z) = 0 \quad (3.119)$$

これより Rankine-Hugoniot 条件は、

$$C[\rho] = [\rho v_x] \quad (3.120)$$

$$C[\rho v_x] = \left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \rho v_x^2 + p \right] \quad (3.121)$$

$$C[\rho v_y] = [\rho v_y v_x] \quad (3.122)$$

$$C[\rho v_z] = [\rho v_z v_x] \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} C\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right] \\ = \left[\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \frac{\rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) v_x \right] \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$C[B_y] = [v_x B_y] \quad (3.125)$$

$$C[B_z] = [v_x B_z] \quad (3.126)$$

と得られる。

(3.122) 式、(3.123) 式、さらに (3.120) 式より

$$\frac{v_{y1}}{v_{y2}} = \frac{v_{z1}}{v_{z2}} = \frac{\rho_2(v_{x2} - C)}{\rho_1(v_{x1} - C)} = 1 \quad (3.127)$$

となることが分かる。よって、

$$\begin{cases} v_{y1} = v_{y2} \\ v_{z1} = v_{z2} \end{cases} \quad (3.128)$$

を得る。これはショック面を通過しても速度の y, z 成分は変化しないことを意味する。つまり $V_1 = V_2$ である。

これより、 $v_y = v_{y1} = v_{y2}$ 、 $v_z = v_{z1} = v_{z2}$ とすると、

$$C[\rho(v_y^2 + v_z^2)] = C(v_y^2 + v_z^2)[\rho]$$

$$[\rho(v_y^2 + v_z^2)v_x] = (v_y^2 + v_z^2)[\rho v_x]$$

と書ける。これと質量保存則 (3.120) 式より、

$$C[\rho(v_y^2 + v_z^2)] = [\rho(v_y^2 + v_z^2)v_x]$$

がいえるので、(3.124) 式は

$$C\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\rho v_x^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right] = \left[\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \frac{\rho v_x^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma-1}\right)v_x\right]$$

と書ける。よって最終的に得られる Rankine-Hugoniot 条件は結局 ($v_x = v$ と
して)、(3.67)~(3.71) 式と同じ条件となり、ショック解が物理的に存在するこ
とが分かる。

3.7 二重 Beltrami ベクトル場のショック

二重 Beltrami ベクトル場の平衡解として、

$$\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_- = B_+ \begin{pmatrix} 0 \\ e^{ik_+(x-vt)} \\ ie^{ik_+(x-vt)} \end{pmatrix} + B_- \begin{pmatrix} 0 \\ e^{ik_-(x-vt)} \\ ie^{ik_-(x-vt)} \end{pmatrix} \quad (3.129)$$

を考える。(3.129) 式で表される二重 Beltrami ベクトル場には、二重 Beltrami
条件 (1.3) 式、(1.4) 式より、磁場 \mathbf{B} とカップリングする流れ

$$\mathbf{v} = \left(k_+ + \frac{1}{a}\right)\mathbf{B}_+ + \left(k_- + \frac{1}{a}\right)\mathbf{B}_- \quad (3.130)$$

が生じることが分かる。

二重 Beltrami ベクトル場における保存則は 2 流体方程式 (2.11) 式、(2.12) 式
より求める必要がある。ここでは中性条件 ($n_i = n_e$) を仮定し、 $m \ll M$ より
 $\rho \simeq \rho_i$ 、 $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_i$ とする。ここで 1 流体との違いとしてホール効果 (Hall effect)
がある。具体的には、電子の慣性力を無視した運動方程式 (2.13) 式より誘導方
程式が (2.20) 式の $j = 1$ のようになる。つまり

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} - \nabla \times \left\{ \left(\mathbf{v} - \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{en\mu_0} \right) \times \mathbf{B} \right\} = 0$$

となる。これにともなってエネルギー保存則にもホール効果の項が入る。つまり 3.3 節の導出において、(3.55) 式の代わりに

$$\mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right\} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left[\left\{ \left(\mathbf{v} - \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{en\mu_0} \right) \times \mathbf{B} \right\} \times \mathbf{B} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{2\mu_0}$$

を用いる必要がある。

(3.129) 式における B は y, z 成分しか持たないので、それぞれ B_y, B_z としてホール効果の項を計算してみる。

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\nabla \times \{ (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \} = 0$$

また

$$\{ (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_z \frac{\partial}{\partial x} \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \\ -B_y \frac{\partial}{\partial x} \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \end{pmatrix}$$

より

$$\nabla \cdot \{ \{ (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \} \times \mathbf{B} \} = 0$$

となることが分かる。つまり今の場合、誘導方程式とエネルギー保存則に現れたホール効果が効かないということが分かる。以上より得られる Rankine-Hugoniot 条件は、(3.120)~(3.126) 式と、つまり (3.67)~(3.71) 式と同じ条件となる。

しかし (3.129) 式における B は 1 つの v に対し、 k_+, k_- と 2 つの値を持つため不連続面上でスリップが生じ、誘導方程式より導かれる (3.70) 式、(3.71) 式

を満たさない。つまりこの系における二重 Beltrami ベクトル場のショック解は存在しないことが分かる。

第4章 軸対称非一様 Beltramiベクトル場

4.1 対称性をもつ磁場の平衡

4.1.1 磁気面

力学的な平衡状態にあるプラズマについて、対称性¹を持つという条件のもとで解析する。2.1 小節で指摘したように、プラズマにおける平衡の一般論は極めて困難である。対称性をもつ磁場(あるいは非圧縮流)は、Clebsch ポテンシャル(磁束関数あるいは流れ関数) ψ を用いて、Clebsch 表現で書くことができる。また磁力線方程式(流線方程式)は、この表現を用いて積分可能となる。

例えば、 B が z 対称²の場合、 $\psi = \psi(x, y)$ 、 $B_z = B_z(x, y)$ として、

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla z + B_z \nabla z \quad (4.1)$$

のように反変-共変形式である Clebsch 表現で表せる。 $\partial B_z / \partial z = 0$ より、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.2)$$

¹ ここでいう対称とは、3次元空間の中に、少なくとも1つ無視できる座標があることを言う。

² z 方向が無視できる座標、つまり z 方向に一様であること。

であることが分かる。また $\partial\psi/\partial z = 0$ より

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\psi = (\nabla\psi \times \nabla z) \cdot \nabla\psi + B_z \nabla z \nabla \cdot \nabla\psi = 0 \quad (4.3)$$

を得る。つまり磁力線は $\psi = \text{const}$ の面、つまり磁気面上に乗っている。対称性のある磁場は磁気面を持っており、磁力線をずっとたどっていても、その磁力線が動ける範囲はある1つの面内、即ち磁気面内に束縛されていることが分かる。

このことを Hamilton 力学の概念でとらえることができる。磁場 B が与える磁力線方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{B} \quad (4.4)$$

を $x-y$ 平面に射影して考える。ここで τ は磁力線上のパラメータである。(4.4) 式を解いて得られる x が磁力線である。(4.4) 式の B に (4.1) 式を代入すると

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \psi \\ -\frac{\partial}{\partial x} \psi \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

を得る。ここで τ を時刻、 x を座標、 y を運動量とみれば、つまり x を相空間における粒子の軌道とみれば (4.5) 式は ψ をハミルトニアンとする正準方程式である。今の場合、空間1次元に対応するので保存量が1つあれば可積分となる。ハミルトニアン ψ は時刻 τ に依存しないので、 ψ が保存量となり磁力線方程式、(4.4) 式は可積分となる。またそれは相空間における軌道 $x = (x, y)$ に沿って ψ が一定であることを意味する。つまり磁力線は $\psi = \text{const}$ の面上に束縛されるのである。

応用上最も重要なのは軸対称 (θ 対称) の場合である。以下この軸対称の場合について考える。即ち円筒座標 (r, θ, z) で $\partial/\partial\theta = 0$ となる場合を考える。 θ 対

称なベクトル場 B は、 $\psi = \psi(r, z)$ 、 $B_\theta = B_\theta(r, z)$ として、

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + B_\theta r\nabla\theta \quad (4.6)$$

と書くことができる (図 4.1)。

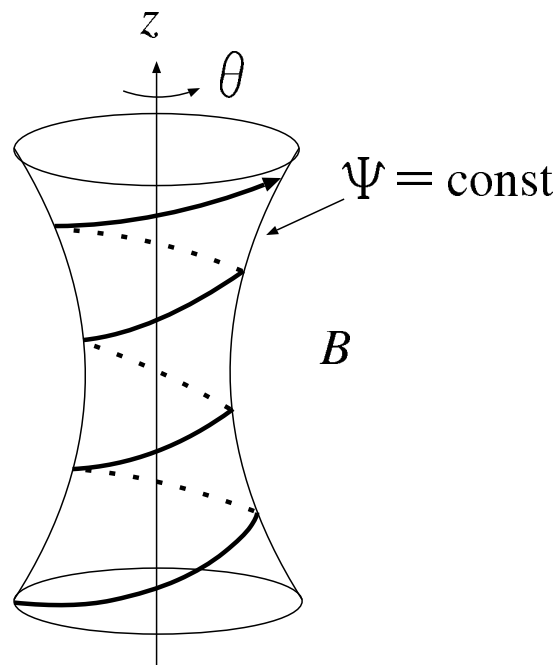


図 4.1: 軸対称磁場

この B は、以下の計算より非圧縮であることが確かめられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla\psi \times \nabla\theta + B_\theta r\nabla\theta \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \psi \\ B_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

より

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\partial}{\partial z} \psi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) = 0 \quad (4.8)$$

を得る。また $\partial\psi/\partial\theta = 0$ より

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\psi = (\nabla\psi \times \nabla\theta) \cdot \nabla\psi + B_\theta r \nabla\theta \cdot \nabla\psi = 0 \quad (4.9)$$

を得る。よって磁力線は $\psi = \text{const}$ の面つまり磁気面上に乗っている。

4.1.2 Grad-Shafranov 方程式

(4.6) 式で表される軸対称プラズマの平衡を考える。 $F = B_\theta r(r, z)$ として、(4.6) 式を書き直すと、

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + F \nabla\theta \quad (4.10)$$

となる。

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla\psi \times \nabla\theta) &= \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} r \nabla\theta \\ &= -\mathcal{L}\psi \nabla\theta \end{aligned} \quad (4.11)$$

但しここで、 \mathcal{L} は Grad-Shafranov 作用素とする。

$$\mathcal{L} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

よって、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla F \times \nabla\theta - \mathcal{L}\psi \nabla\theta \quad (4.12)$$

と計算される。

(4.10) 式、(4.12) 式をプラズマの平衡方程式である (2.3) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} &= (\nabla F \times \nabla \theta - \mathcal{L}\psi \nabla \theta) \times (\nabla \psi \times \nabla \theta + F \nabla \theta) \\
 &= -\frac{1}{r^2} \mathcal{L}\psi \nabla \psi + \frac{1}{r^2} (\nabla F \times \nabla \psi) - \frac{1}{r^2} F \nabla F \\
 &= \mu_0 \nabla p
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

つまり、

$$-\mathcal{L}\psi \nabla \psi + \nabla F \times \nabla \psi - F \nabla F = r^2 \mu_0 \nabla p \tag{4.14}$$

を得る。この θ 成分を見ると、 $\partial p / \partial \theta = 0$ と、 $\nabla F \times \nabla \psi$ は θ 成分のみを持つことから、

$$\nabla F \times \nabla \psi = 0 \tag{4.15}$$

が成り立たねばならない。したがって

$$\nabla F \parallel \nabla \psi$$

がいえるので、 F は ψ の合成関数

$$F(r, z) = F(\psi(r, z)) \tag{4.16}$$

の形に表すことができる。 $\nabla F = F' \nabla \psi$ と書く。これを (4.14) 式に代入すると

$$-\mathcal{L}\psi \nabla \psi - FF' \nabla \psi = r^2 \mu_0 \nabla p \tag{4.17}$$

となる。したがって

$$\nabla p \parallel \nabla \psi$$

がいえるので、 p も F と同様に ψ の合成関数で書くことができる。よって $\nabla p = p' \nabla \psi$ と書ける。これを (4.17) 式に代入すると、

$$(-\mathcal{L}\psi - FF' - r^2 \mu_0 p') \nabla \psi = 0 \tag{4.18}$$

を得る。 $\nabla\psi \neq 0$ のところでは

$$-\mathcal{L}\psi - FF' - r^2\mu_0 p' = 0 \quad (4.19)$$

を満たさねばならない。

境界条件は \mathbf{n} を境界上の外向単位法線ベクトルとして、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ とする。 \mathbf{B} の表式 (4.10) 式を代入し、 $\mathbf{n} \cdot \nabla\theta = 0$ を考慮すると

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta) = \nabla\theta \cdot (\mathbf{n} \times \nabla\psi) = 0$$

したがって境界上で、 $\psi = \text{const}(= 0)$ となる。

以上より、領域 Ω (境界 $\partial\Omega$) において Grad-Shafranov 方程式 (4.20) 式を得る。

$$\begin{cases} -\mathcal{L}\psi = FF' + r^2\mu_0 p' & \text{in } \Omega \\ \psi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.20)$$

Grad-Shafranov 方程式は $F(\psi)$ 、 $p(\psi)$ の関数形をあらかじめ与えれば、(半線形) 楕円型偏微分方程式となる。もとのプラズマの平衡方程式 (2.3) 式は 2 楕円・2 双曲型である (付録 A)。Grad-Shafranov 方程式に現れた 2 つの関数 $F(\psi)$ 、 $p(\psi)$ は (2.3) 式の 2 つの双曲型の部分に対応する Cauchy のデータである。2 つの楕円型成分のうち、1 つは Clebsch 表現 (4.10) 式が $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を常に満足するというで用いられている。最後の 1 つの楕円性が、楕円型偏微分方程式 (4.20) 式の境界値問題として定式化された。

4.2 Beltrami ベクトル場への応用

軸対称である Beltrami ベクトル場について考える。そこで軸対称 \mathbf{B} の Clebsch 表現 (4.10) 式を (1.1) 式で表される Beltrami 条件、 $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda\mathbf{B}$ に代入

する。

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \nabla F \times \nabla \theta - \mathcal{L}\psi \nabla \theta \\ &= \lambda \mathbf{B} \\ &= \lambda(\nabla \psi \times \nabla \theta) + \lambda F \nabla \theta\end{aligned}\tag{4.21}$$

よって、

$$\begin{cases} \mathcal{L}\psi = -\lambda F \\ \nabla F = \lambda \nabla \psi \end{cases}\tag{4.22}$$

を得る。また (4.20) 式において無力状態 (force-free) の条件 $\nabla p = 0$ 、つまり $p' = 0$ とすると

$$\mathcal{L}\psi = -F(\psi) F'(\psi)\tag{4.23}$$

である。(4.22) 式と比較すると

$$\lambda = F'(\psi)\tag{4.24}$$

を得る。したがって $\lambda = \lambda(\psi)$ である。つまり $\psi = \text{const}$ である磁気面上で $\lambda = \text{const}$ であることが分かる。

全空間で $\lambda = \text{const}$ 、つまり一様 Beltrami ベクトル場の場合は、 $F = \lambda\psi + c$ (c は積分定数) となる。ここで $\psi \rightarrow \psi/\lambda - c$ とすることで積分定数を無視できる。よって

$$\mathcal{L}\psi = -\lambda^2 \psi\tag{4.25}$$

となり線形偏微分方程式を得る。

4.3 二重 Beltrami ベクトル場への応用

ここでは、非圧縮 ($\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$) かつ軸対称な流れ \boldsymbol{v} を考え、軸対称な二重 Beltrami ベクトル場を考える。そこで先ず、 \boldsymbol{B} 、 \boldsymbol{v} を Clebsch 表現を用いて以下のように書く。

$$\boldsymbol{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + F \nabla\theta \quad (4.26)$$

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi \times \nabla\theta + G \nabla\theta \quad (4.27)$$

\boldsymbol{B} 、 \boldsymbol{v} の curl をとるとそれぞれ、

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla F \times \nabla\theta - \mathcal{L}\psi \nabla\theta \quad (4.28)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla G \times \nabla\theta - \mathcal{L}\phi \nabla\theta \quad (4.29)$$

となる。これを二重 Beltrami 条件 (1.3) 式、(1.4) 式に代入する。 $\tilde{a} = 1/a$ として (1.3) 式、(1.4) 式を書き直すと、

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} - \nabla \times \boldsymbol{B} = \tilde{a}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} + \nabla \times \boldsymbol{v} = b\boldsymbol{v} \end{cases} \quad (4.30)$$

を得る。

またここで、(4.30) 式の発散 ($\nabla \cdot$) をとると、 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 、かつ $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ なので

$$\boldsymbol{B} \cdot \nabla \tilde{a} = 0 \quad (4.31)$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla b = 0 \quad (4.32)$$

が示される。これから、 \tilde{a} は $\psi = \text{const}$ で表される面 (磁気面) 上で、 b は $\phi = \text{const}$ で表される面上で一定であることが分かる。よって、 $\tilde{a} = \tilde{a}(\psi)$ 、 $b = b(\phi)$ の形に表すことができる。

(4.26)~(4.29) 式を (4.30) 式に代入すると

$$\begin{cases} \nabla\phi \times \nabla\theta + G \nabla\theta - (\nabla F \times \nabla\theta - \mathcal{L}\psi \nabla\theta) = \tilde{a}(\nabla\psi \times \nabla\theta + F \nabla\theta) \\ \nabla\psi \times \nabla\theta + F \nabla\theta + (\nabla G \times \nabla\theta - \mathcal{L}\phi \nabla\theta) = b(\nabla\phi \times \nabla\theta + G \nabla\theta) \end{cases} \quad (4.33)$$

よって、

$$\begin{cases} (\nabla\phi - \nabla F - \tilde{a}\nabla\psi) \times \nabla\theta + (G + \mathcal{L}\psi - \tilde{a}F)\nabla\theta = 0 \\ (\nabla\psi + \nabla G - b\nabla\phi) \times \nabla\theta + (F - \mathcal{L}\phi - bG)\nabla\theta = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

となる。したがって、軸対称二重 Beltrami ベクトル場が平衡解として存在する条件は、

$$\begin{cases} \nabla\phi - \nabla F - \tilde{a}\nabla\psi = 0, & G + \mathcal{L}\psi - \tilde{a}F = 0 \\ \nabla\psi + \nabla G - b\nabla\phi = 0, & F - \mathcal{L}\phi - bG = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

であることが分かる。ここで $A'(\psi) = \tilde{a}(\psi)$ 、 $B'(\phi) = b(\phi)$ を定義すると、

$$\nabla A(\psi) = \tilde{a}\nabla\psi, \quad \nabla B(\phi) = b\nabla\phi$$

と書けるので、(4.35) 式の第 1 式より

$$\nabla(\phi - F - A(\psi)) = 0, \quad \nabla(\psi + G - B(\phi)) = 0 \quad (4.36)$$

を得る。よって c_1 、 c_2 を積分定数として、

$$F = \phi - A(\psi) + c_1, \quad G = -\psi + B(\phi) - c_2 \quad (4.37)$$

と表せる。これを (4.35) 式の第 2 式に代入すると、

$$\begin{cases} \mathcal{L}\psi = A'(\psi)(\phi - A(\psi) + c_1) + \psi - B(\phi) + c_2 \\ \mathcal{L}\phi = B'(\phi)(\psi - B(\phi) + c_2) + \phi - A(\psi) + c_1 \end{cases} \quad (4.38)$$

と ψ 、 ϕ に関する連立偏微分方程式を得る。よって、 ψ 、 ϕ について解くことが可能である。これより Beltrami パラメータ a 、 b が一定でない軸対称二重 Beltrami ベクトル場が平衡解として存在することが示せた。

また \tilde{a} 、 b が定数の場合とのアナロジーから、(1.6) 式において $\lambda_+ \neq \text{const}$ 、 $\lambda_- \neq \text{const}$ であるような解の存在が示唆される³。これより、大きく構造が異なり、相互に影響しあう2つの Beltrami 渦管の存在が示唆される。

\tilde{a} 、 b が定数の場合は、 ψ 、 ϕ の線形連立偏微分方程式として

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \tilde{a}^2 & \tilde{a} - b \\ b - \tilde{a} & 1 - b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

を得る。

³ (1.3) 式、(1.4) 式から (1.5) 式、(1.6) 式への式変形は a 、 b が定数の場合に可能なのでこのことは即座には言えない。

第5章 まとめ

本研究では非線形の渦構造を表す Beltrami ベクトル場の一般化として、非一様化を考え、ショック構造と孤立した渦管の理論的な研究を行った。

1. Beltrami ベクトル場のショック

ねじれの構造を表す k (または λ) のジャンプ条件を得た。さらに Beltrami ベクトル場の物理的なショック解を得た。

また、流れを考えることにより以下の知見を得た。

- 流れがある場合、不連続面と平行な面上の流れは変化 (ジャンプ) しないという条件が加わることが分かった。
- 磁場とカップリングした大きな流れを持つ二重 Beltrami ベクトル場の場合、ショック解は存在しないことが分かった。

2. Beltrami 渦管

B 、 v のねじれ構造を表す Beltrami パラメータ a 、 b が一定でない軸対称二重 Beltrami ベクトル場の存在を示した。

1. ではねじれを持つ Beltrami ベクトル場が衝突したところにショック構造が存在し得ることを示した。これは太陽風のショック構造やフレアなどの理論に応用できるのではないかと考えられる。また二重 Beltrami ベクトル場の高速流を利用して高 β 閉じ込めを考えている本研究室の Proto-RT ではショックが

起きにくいということが示唆される。2. では二重 Beltrami ベクトル場における Beltrami 渦管が存在し得ることを示した。これは REPUTE で統計的な性質が調べられたフィラメント構造に応用できるのではないかと考えられる。

最後に Ulysses のデータ (図 5.1、図 5.2、Ulysses ホームページ、NASA より) を簡単にまとめておく。Ulysses の観測により、太陽風の速度は極側の方が低緯度側に比べて大きいことが分かった。また太陽風の磁場は太陽の自転によってねじれており、低緯度側の方が極側よりも自転の速度が大きいため、強くねじれていることが知られている。さらに Ulysses の観測から低緯度側の太陽風の構成成分の方が重い原子を多く含み、温度が高く、その境界は速度の境界とほぼ一致し、変化は急であることが分かった。つまりショックが形成されているのではないかと考えられる。また磁場に関して、極側の磁場はダイポール磁場を仮定すると低緯度側から予想される磁場よりも弱いことも分かった。これらの観測データは、今回得られた Rankine-Hugoniot 条件と定性的に一致している。

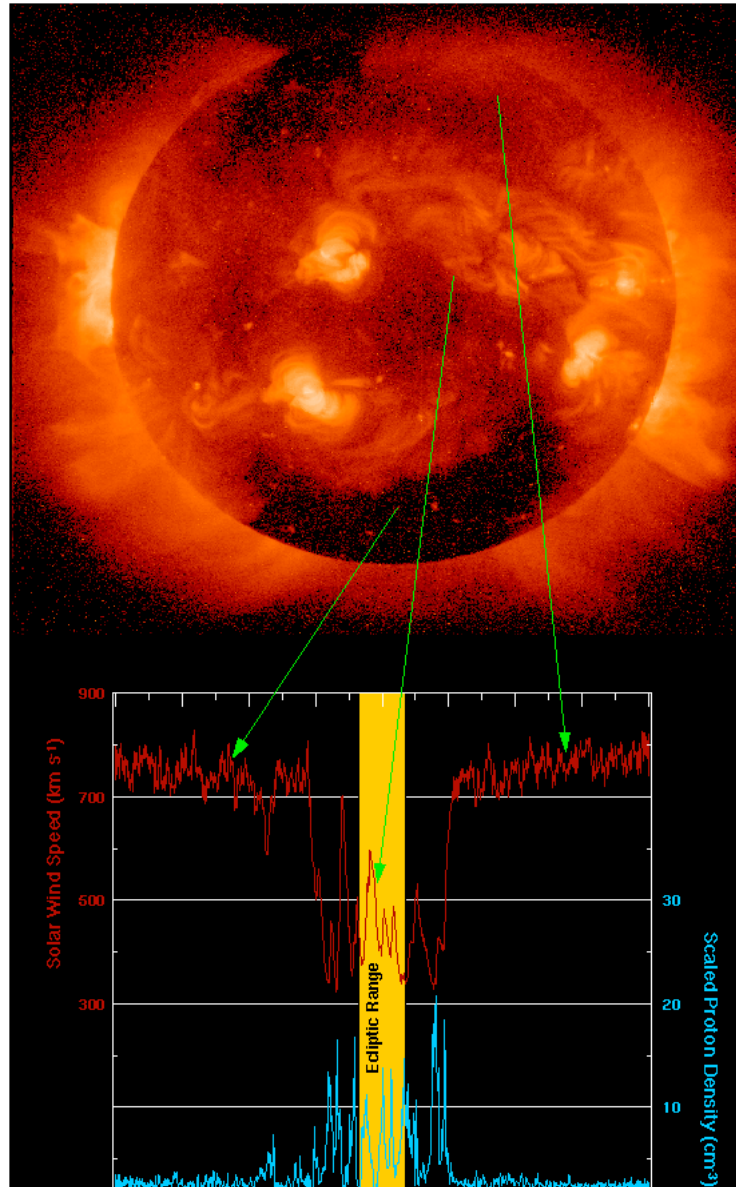


図 5.1: Ulysses データ 1 [上線：速度、下線：密度]

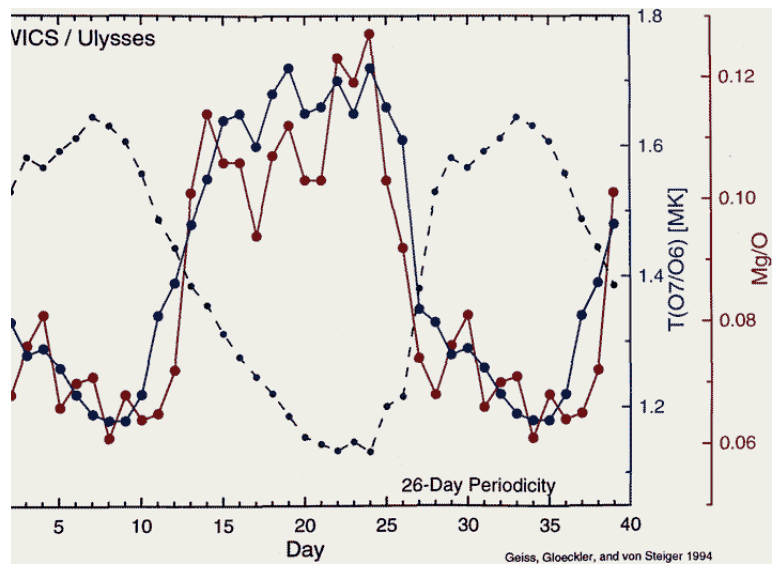


図 5.2: Ulysses データ 2 [破線：速度 (α 粒子)、実線：密度 (Mg/O 比)、温度 (O7+/O6+比)]

付録A プラズマの平衡方程式

MHD 方程式よりプラズマの平衡方程式 (A.1) 式が得られる。

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

ベクトル公式を用いて (A.1) 式を書き直すと、

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} = \nabla(\mu_0 p + \frac{B^2}{2}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

となる。従ってこの問題は非圧縮定常流のオイラー方程式とアナロジーを持つ。

まずここで偏微分方程式系の理論に基づいた分類を行う。直交座標系 (x, y, z) で (A.2) 式を行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \cdot \nabla & 0 & 0 & -\partial_x \\ 0 & \mathbf{B} \cdot \nabla & 0 & -\partial_y \\ 0 & 0 & \mathbf{B} \cdot \nabla & -\partial_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ \mu_0 p + \frac{B^2}{2} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.3})$$

を得る。ここで ∂_x は $\partial/\partial x$ を表す。無限領域で境界条件などを考えずに、平面波型の解 $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ を考える。微分は波数 k で置き換えられ、代数方程式と

なる。よって自明でない解が存在する条件は、

$$\begin{vmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & 0 & 0 & -k_x \\ 0 & \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & 0 & -k_y \\ 0 & 0 & \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & -k_z \\ k_x & k_y & k_z & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.4})$$

である。これより特性方程式は

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 |\mathbf{k}|^2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

となる。 $|\mathbf{k}|^2 = 0$ は波の解がないことを意味している。4連立偏微分方程式系のうちこの2成分は楕円型偏微分方程式である。 $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 = 0$ は $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ である波の解を与え、2つの特性方向は \mathbf{B} の方向に縮退している。この2成分は退化双曲型偏微分方程式である。つまり4連立偏微分方程式系であるプラズマの平衡方程式 (A.1) 式は、2楕円・2退化双曲型偏微分方程式系である。

付録B Waltjer-Taylorの変分計算

極小磁場配位を求めるには、未定乗数 μ を用いて自由エネルギー

$$F(\mathbf{A}) = U(\mathbf{A}) - \mu H(\mathbf{A}) \quad (\text{B.1})$$

を定義し、この極小値が平衡状態を与える。このとき境界条件として $\partial\Omega$ 上で \mathbf{A} の接線成分を固定 (完全導体壁) して、変分をとる。そこで先ず磁場のエネルギー $U(\mathbf{A})$ について変分をとると、

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} (|\nabla \times (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2) dx \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A}) dx \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \{(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})) \cdot \delta\mathbf{A} - \nabla \cdot ((\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta\mathbf{A})\} dx \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

ここで、Stokes の定理、境界条件より

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \{(\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta\mathbf{A}\} dx &= - \int_{\partial\Omega} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{n} \times \delta\mathbf{A}) dS \\ &= 0 \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

よって、

$$\delta U = \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})\} \cdot \delta\mathbf{A} dx \quad (\text{B.4})$$

次にヘリシティ $H(\mathbf{A})$ について変分をとると、

$$\begin{aligned}\delta H &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \{(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) \cdot (\nabla \times (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\} dx \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \{(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \delta\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A})\} dx\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

ここで、

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A}) dx &= \int_{\Omega} \{(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \delta\mathbf{A} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \delta\mathbf{A})\} dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \delta\mathbf{A} dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{n} \times \delta\mathbf{A}) d\mathbf{S} \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \delta\mathbf{A} dx\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

よって、

$$\delta H = \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \delta\mathbf{A} dx\quad (\text{B.7})$$

(B.4)(B.7) 式より

$$\begin{aligned}\delta F &= \delta U - \mu\delta H \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mu\nabla \times \mathbf{A}\} \cdot \delta\mathbf{A} dx \\ &= 0\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

よって Euler-Lagrange 方程式は次式のように得られる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mu\nabla \times \mathbf{A} = 0\quad (\text{B.9})$$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ より

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{B}\quad (\text{B.10})$$

を得る。

付録C 双曲型偏微分方程式と波動方程式

偏微分方程式

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{C.1})$$

は以下の3つのクラスに分類される。

$$b^2 - ac \begin{cases} > 0 \cdots \text{双曲型偏微分方程式} \\ = 0 \cdots \text{放物型偏微分方程式} \\ < 0 \cdots \text{楕円型偏微分方程式} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

波動方程式は双曲型偏微分方程式に属する。以下では波動方程式を中心に双曲型偏微分方程式について述べる。ここで

$$\phi = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{C.3})$$

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{C.4})$$

として、2次元ベクトル U 、マトリクス A を次のように定義する。

$$U = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$A = \begin{pmatrix} 2b/a & c/a \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

そうすると (C.1) 式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = 0 \quad (\text{C.7})$$

のように書ける。マトリクス \mathcal{A} の固有値を λ とすると、

$$a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0 \quad (\text{C.8})$$

双曲型偏微分方程式では、 $b^2 - ac > 0$ より λ は 2 つの実根をもつ。固有値をそれぞれ、

$$\lambda_{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (\text{複号同順}) \quad (\text{C.9})$$

とすると (C.1) 式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_+ \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_- \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \quad (\text{C.10})$$

と書ける。ここで特性常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_{\pm} \quad (\text{C.11})$$

が得られ、これを解いて特性曲線が得られる。また (C.10) 式における微分の順序を入れ換えることにより、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_+ \frac{\partial}{\partial x}\right) (\phi + \lambda_- \psi) = 0 \quad (\text{C.12})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_- \frac{\partial}{\partial x}\right) (\phi + \lambda_+ \psi) = 0 \quad (\text{C.13})$$

を得る。これらの方程式は、それぞれ $\phi + \lambda_{\mp} \psi$ が傾き $dx/dt = \lambda_{\pm}$ で表される特性曲線に沿って一定であることを示している (Riemann 不変量と呼ばれる)¹。

¹ 但し、非線形の場合特性曲線は簡単に求まらず、偏微分方程式を一般には陽に解くことができない。しかし Riemann 不変量の方が一定値をとる場合は容易に解ける。これを単純波という。

$v_c = \text{const}$ として $\lambda_{\pm} = \pm v_c$ と与えられる場合 (C.10) 式は線形となり自由伝播の波動方程式となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - v_c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (\text{C.14})$$

この解は2つの滑らかな任意関数 f_+ 、 f_- を用いて、

$$u = f_+(x - v_c t) + f_-(x + v_c t) \quad (\text{C.15})$$

と d'Alembert の解で表すことができる。 $f_+(x - v_c t)$ 、 $f_-(x + v_c t)$ は、それぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v_c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.17})$$

を満たす解である。 $f_+(x - v_c t)$ 、 $f_-(x + v_c t)$ は、それぞれ任意の波形を保ちながら $\pm x$ 方向に速度 $\pm v_c$ で移動する。

これは粒子の運動方程式と対応付けられる。粒子集団が空間を運動する場合、その密度をみると、粗密が空間を伝播するように見える。これはあくまで個々の粒子の運動の寄せ集めである。したがって波動方程式は、個々の粒子の運動方程式を解くことによって解くことができるはずである。ある種の波動現象は、振幅を仮想粒子の密度に対応付けることによって粒子の運動に分解して考えることができる。

非圧縮の速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ が与えられると、運動方程式は次のように書くことができる。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{C.18})$$

ある物理量 $u(\mathbf{x}, t)$ が流線に沿って保存する場合、流線に沿った時間微分を考えて、

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x}(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} u + (\mathbf{v} \cdot \nabla) u = 0 \quad (\text{C.19})$$

となる。(C.18)、(C.19)式はそれぞれ特性常微分方程式、波動方程式に対応する²。一般にこれを解く場合は(C.18)式を解くことから始める。 x の初期値を x_0 として解くと、軌道 $x = x(x_0; t)$ が得られる。これは特性曲線に対応する。 $x(x_0; t)$ は $x_0 \rightarrow x$ への写像と考えられる。また非圧縮($\nabla \cdot v = 0$)より、Liouvilleの定理から $x \rightarrow x_0$ の逆像が存在する。これを $x_0(x, t)$ と表す。時刻 t で x にいる粒子は $t = 0$ で x_0 にいたことになる。よって u の初期分布を u_0 とすると、 u の保存を表す(C.19)式の解は、

$$u(\boldsymbol{x}, t) = u_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{x}, t)) \quad (\text{C.20})$$

と求まる。これをLagrange表示と呼び、d'Alembertの解、(C.15)式を一般化したものである。この解は、粒子間に相互作用がなく移動する粒子の集団は独立に解析でき、 u は初期分布 u_0 を用いて表せることを意味する。これは波動方程式が初期条件を要することに対応する³。また波動方程式はその初期値が特性曲線に沿って保存することを意味する。ゆえに自由伝播の波は、d'Alembertの解で表されるように任意の初期波形を保存したまま移動する。しかし非線形性が加わると、特性曲線が簡単には求まらないことが多い。あるときには特性曲線が衝突してしまい不連続波形を生じる。これがショックに対応する。

一般に(C.7)式において U が n 次元ベクトルの場合にも同様に考えること

² 空間1次元で $v = v_c (= \text{const})$ の場合自由伝播の波動現象に対応する。また v がHamilton流の場合(C.19)式はLiouville方程式になる。

³ 一般に双曲型偏微分方程式は初期条件に対応するCauchyのデータを要する。

ができる。

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

に対して、 $n \times n$ マトリクス A を用いて、双曲型偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} U + A \frac{\partial}{\partial x} U = 0 \quad (\text{C.22})$$

が得られたとする。このとき、マトリクス A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は全て実数で、それに対応する固有ベクトル R_1, R_2, \dots, R_n は線形独立である。2次元のときと同様に、特性常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{C.23})$$

が得られ、これを解いて特性曲線が得られる。 A が U に依存しない線形方程式では、 λ_i および R_i は x, t の定まった関数となり、固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を (局所) 位相速度とする n 個の波のモードが存在する。さらに A が定数マトリクスであれば、一般解 U は $x - \lambda_i$ の任意関数 $f_i(x - \lambda_i)$ によって

$$U = \sum_{i=1}^n f_i(x - \lambda_i) R_i \quad (\text{C.24})$$

と書ける。これは d'Alembert の解に対応する。 R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の線形独立性により、 $f_i(x - \lambda_i)$ は初期条件 $U(x, 0) = U_0(x)$ から一意に定まる。

付録D Riemann問題

Burgers 方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{D.1})$$

において $x = 0$ で不連続な初期条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ +1 & (x > 0) \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

を考える。この初期条件と Rankine-Hugoniot 条件を満たす解として、 $x = 0$ の点が不連続面のまま定常に存続する解

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ +1 & (x > 0) \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

不連続波以外でも、初期条件と (D.1) 式を満たす解として膨張波解

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & (x < -t) \\ x/t & (-t < x < +t) \\ +1 & (x > +t) \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

が存在することが分かる。さらに (D.3) 式に (D.4) 式を接続すると新しい解を得ることができ解は一意に定まらない。この問題に対して不連続面が存続するものと、膨張して解消する解があることが分かる。一般に非線形波動方程式の解に不連続性を許すと解は一意に定まらなくなる。この問題に対して不連続面が存続するものと、膨張して解消する解があることが分かる。

付録E 気体におけるショック

保存則

- 質量保存則 (連続の式)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{E.1})$$

- 運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p = 0 \quad (\text{E.2})$$

(但し、 \otimes はテンソル積を表す。)

- エネルギー保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}\right) + \nabla \cdot \left\{\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1}\right)\mathbf{v}\right\} = 0 \quad (\text{E.3})$$

ここで物理量は全て座標 x 、時間 t のみに依存し、 e_x を x 方向の単位ベクトルとして、 $\mathbf{v} = v e_x$ とする。そうすると (E.1) ~ (E.3) は全て (3.8) 式のような形に書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (\text{E.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) = 0 \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1}\right)v\right\} = 0 \quad (\text{E.6})$$

よって Burgers 方程式の場合と同様の手順で、変数の積分をとってその時間変化を計算することにより、Rankine-Hugoniot 条件を求めることができる。

$$C[\rho] = [\rho v] \quad (\text{E.7})$$

$$C[\rho v] = [\rho v^2 + p] \quad (\text{E.8})$$

$$C\left[\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}\right] = \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1}\right)v\right] \quad (\text{E.9})$$

全ての物理量は不連続面以外では一定とし、不連続面の両側の量をそれぞれ添字 1、2 をつけて表すこととする。また、 $C = 0$ として考えて一般性を失わない。なぜなら $C \neq 0$ の場合は $C = 0$ の解をガリレイ変換することで容易に求めることができるからである。そこで以下では $C = 0$ として考える。そうすると (E.7) ~ (E.9) 式は (E.10) ~ (E.12) 式のように書ける。

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (\text{E.10})$$

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 \quad (\text{E.11})$$

$$\left(\frac{\rho_1 v_1^2}{2} + \frac{\gamma p_1}{\gamma - 1}\right)v_1 = \left(\frac{\rho_2 v_2^2}{2} + \frac{\gamma p_2}{\gamma - 1}\right)v_2 \quad (\text{E.12})$$

ここで、(E.10) ~ (E.12) 式より X 、 Y を次のように定義できる。

$$X = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad (\text{E.13})$$

$$Y = \frac{p_2}{p_1} \quad (\text{E.14})$$

(E.10) ~ (E.12) 式から v_1, v_2 を消去すると、

$$X = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2} \quad (\text{E.15})$$

$$Y = \frac{p_1}{p_2} = \frac{(\gamma - 1)\rho_1 - (\gamma + 1)\rho_2}{(\gamma - 1)\rho_2 - (\gamma + 1)\rho_1} \quad (\text{E.16})$$

を得る。また音速 $a_1 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}$ として、マッハ数 $M_1 = v_1 / a_1$ とすと、

$$X = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \quad (\text{E.17})$$

$$Y = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (\text{E.18})$$

を得る。

気体では粘性の効果によって、エネルギー散逸がおこり、気体のエントロピーが上昇する。よって、この解の中から物理的な解を取り出すためにエントロピー増大の法則を用いる。気体のエントロピーは $\log(p\rho^{-\gamma})$ と表すことができる。ショックの通過によるエントロピー変化は (E.15) 式より計算できる。したがって、

$$\begin{aligned} ds &= C_v d \log(p\rho^{-\gamma}) = C_v \gamma \log\left\{\frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}\right\} \\ &= C_p \log\left\{\frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}\right\} \\ &= C_p \log\left\{\frac{(\gamma + 1)Y + (\gamma - 1)}{(\gamma - 1)Y + (\gamma + 1)} Y^{1/\gamma}\right\} \\ &> 0 \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

を要請する。これより $Y = p_2/p_1 > 1 (X > 1)$ がいえる (図 E.1)。このことから、 $\rho_2 > \rho_1, p_2 > p_1, v_2 < v_1, M_1 > 1, M_2 < 1$ がいえて、圧縮性の解を物理的な解として選ぶことができる。

次に発展性条件を考える。(E.4)~(E.6) より、

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = 0 \quad (\text{E.20})$$

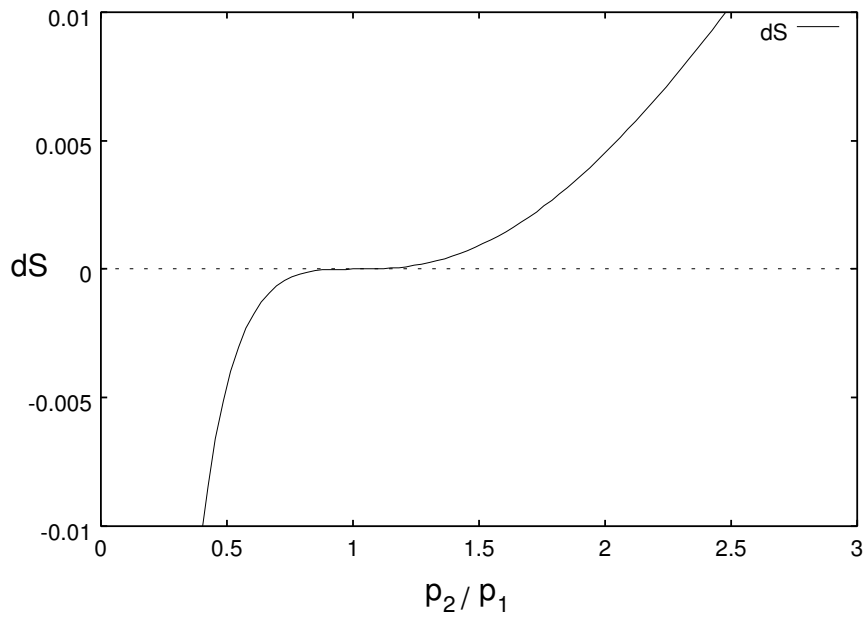


図 E.1: エントロピー変化と圧力の関係

の形に書くと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{E.21})$$

となる。ここで (E.21) 式は 3 次元、つまり $n = 3$ である。さらに $\delta\rho, \delta v, \delta p$ を考えて 1 次の線形化を行なう。また $\tilde{v} = v - C$ とすると、(E.21) 式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta v \\ p\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{v} & \rho & 0 \\ 0 & \tilde{v} & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & \tilde{v} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{E.22})$$

と書ける。マトリクス

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{v} & \rho & 0 \\ 0 & \tilde{v} & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & \tilde{v} \end{pmatrix}$$

の固有値 $\tilde{\lambda} = \tilde{v}_{ph}$ を求めると、 a を音速として $\tilde{v}, \tilde{v} + a, \tilde{v} - a$ を得る。ここで一般性を失うことなく $C = 0$ とすることができる。このとき $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}, \tilde{v} = v$ である。ショック面が $x = 0$ にあるとして、 $x < 0$ を領域 1、 $x > 0$ を領域 2 とする。よってそれぞれの領域において、固有値は

$$\begin{cases} v_{ph1} = v_1, v_1 + a_1, v_1 - a_1 \\ v_{ph2} = v_2, v_2 + a_2, v_2 - a_2 \end{cases}$$

と書ける。

その場合それぞれ、 $v_{ph1} < 0, v_{ph2} > 0$ のとき外向波となる。外向波の数が $n - 1 = 2$ 個となるのは $v_1 > a_1, v_2 < a_2$ の場合である (図 E.2 の斜線部)。これはエントロピー増加の条件より求めた解と同じである。

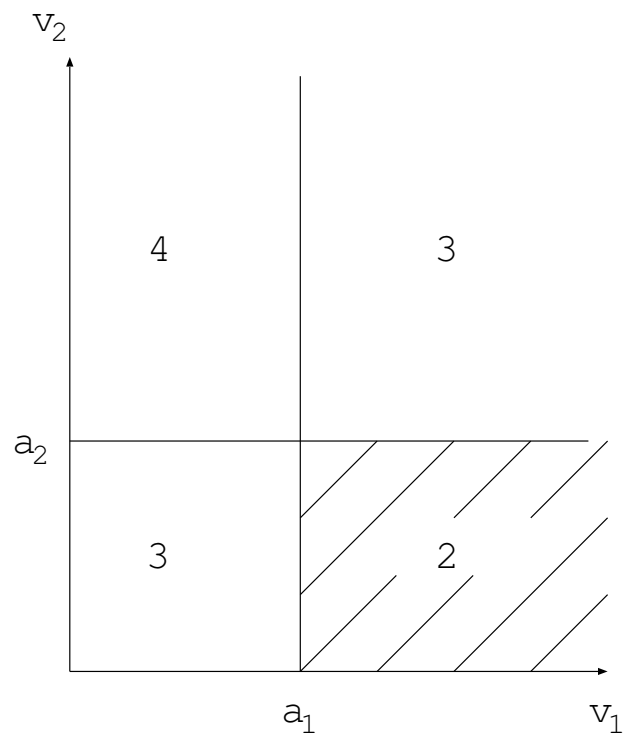


図 E.2: 気体のショックにおける発展的領域 (図中の数字は外向波の数)

付録F プラズマ中の波動

以下の MHD 方程式と状態方程式を 1 次で線形化し、プラズマ中における波動 (単純波) を求める。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{F.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{F.2})$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (\text{F.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S + (\mathbf{v} \cdot \nabla) S = 0 \quad (\text{F.4})$$

(F.4) 式は流れに沿ってエントロピー (S) が一定であることを示す。つまり等エントロピー変化を考える。

ここで平衡解に対して微小変動量 $\delta \mathbf{B}$ 、 $\delta \rho$ 、 δp 、 $\delta \mathbf{v}$ 、 δS を考える。等エントロピー変化を考えているので a を音速として、

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \delta \rho = a^2 \delta \rho$$

と書くことができる。またこれらの微小変動量は平面波として、 $\exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\}$ の形で伝わるものとする。(F.1)~(F.4) 式を線形化すると次式を得る。

$$-\omega \delta \rho + \mathbf{k} \cdot (\rho \delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \delta \rho) = 0 \quad (\text{F.5})$$

$$-\omega \delta \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \{(\delta \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B})\} \quad (\text{F.6})$$

$$-\omega\delta\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\delta\mathbf{v} = -\frac{a^2}{\rho}\mathbf{k}\delta\rho + \frac{1}{\rho\mu_0}(\mathbf{k} \times \delta\mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (\text{F.7})$$

$$-\omega\delta S + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\delta S = 0 \quad (\text{F.8})$$

(F.6) 式は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より得られる $\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{B} = 0$ を含む。これより $\mathbf{k} \perp \delta\mathbf{B}$ がいえる。そこで $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$ としてその他の物理量を以下のように定める。

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \delta\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta B_y \\ \delta B_z \end{pmatrix}, \quad \delta\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z \end{pmatrix}$$

さらに $v_{ph} = \omega/k$ として (F.5)~(F.8) 式を書き直す。またこれらは3つのグループに分けることができる。

- 第1グループ ($\delta B_z, \delta v_z$)

$$\begin{cases} (v - v_{ph})\delta B_z - \delta v_z B_x = 0 \\ (v - v_{ph})\delta v_z - \frac{B_x \delta B_z}{\rho\mu_0} = 0 \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

- 第2グループ ($\delta\rho, \delta B_y, \delta v_x, \delta v_y$)

$$\begin{cases} (v - v_{ph})\delta\rho + \rho v_x = 0 \\ (v - v_{ph})\delta B_y + v_x B_y - v_y B_x = 0 \\ (v - v_{ph})\delta v_x + \frac{a^2}{\rho}\delta\rho + \frac{1}{\rho\mu_0}B_y\delta B_y = 0 \\ (v - v_{ph})\delta v_y - \frac{1}{\rho\mu_0}B_x\delta B_y = 0 \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

- 第3グループ (δS)

$$(v - v_{ph})\delta S = 0 \quad (\text{F.11})$$

以上より変数を消去し、 v_{ph} を求める。まず第1グループより、

$$(v - v_{ph})^2 = \frac{B_x^2}{\rho\mu_0} = V_{Ax}^2$$

を得る。第2グループより $V = (v - v_{ph})$ として、

$$V^4 - \left(\frac{B_x^2 + B_y^2}{\rho\mu_0} + a^2\right)V^2 + \frac{B_x^2}{\rho\mu_0}a^2 = 0$$

$V_A^2 = (B_x^2 + B_y^2)/\rho\mu_0$ より、

$$V^4 - (V_A^2 + a^2)V^2 + V_{Ax}^2 a^2 = 0$$

これより、

$$\begin{aligned} V^2 = (v - v_{ph})^2 &= \frac{1}{2} \left\{ V_A^2 + a^2 \pm \sqrt{(V_A^2 + a^2)^2 - 4V_{Ax}^2 a^2} \right\} \\ &= \begin{cases} V_f \\ V_s \end{cases} \end{aligned}$$

を得る。第3グループより

$$v - v_{ph} = 0$$

を得る。

以上より

- 第1グループ

$$v_{ph} = v \pm V_{Ax} \quad (\text{アルフベン波}) \quad (\text{F.12})$$

- 第2グループ

$$v_{ph} = \begin{cases} v \pm V_f & (\text{速進波}) \\ v \pm V_s & (\text{遅進波}) \end{cases} \quad (\text{F.13})$$

- 第3グループ

$$v_{ph} = v \quad (\text{エントロピー波}) \quad (\text{F.14})$$

7個の波が得られる。

関連図書

- [1] 吉田 善章：集団現象の数理、岩波書店、1995
- [2] 吉田 善章：非線形科学入門、岩波書店、1998
- [3] 吉田 善章：プラズマ乱流による電流異常拡散とそれに伴う異常輸送に関する理論的研究、平成 3、4 年度科学研究費補助金 (一般研究 C) 研究成果報告書、1993
- [4] S.M.Mahajan Z.Yoshida : Double curl Beltrami flow:Diamagnetic structures、Phys.Rev.Lett.81,4863、1998
- [5] Z.Yoshida Y.Sahuragi Y.Yamakoshi : A reduced model of chaotic magnetic fluctuation in a tokamak plasma 、 J.Plasma.Phys.49,403、1993
- [6] J.B.Taylor : Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields、Phys.Rev.Lett.33.1139、1974
- [7] 佐藤 哲也：自己組織化するプラズマ (物理学最前線 3 1)、共立出版株式会社、1993
- [8] 谷 一郎：流れ学、岩波全書、1967

- [9] A.Jeffrey,T.Taniuti : Non-linear wave propagation、 Academic Press、 1964
- [10] 後藤 憲一 : プラズマ物理学、 共立出版株式会社、 1967
- [11] R.V.Polvin : Shock waves in magnetohydrodynamics、
Soviet.Phys.Uspekhi.3,677、 1961
- [12] Ulysses(NASA)homepage :
<http://ulysses.jpl.nasa.gov/ULSHOME/ulshome.html>

謝辞

本研究をまとめるにあたり、親身に御指導頂いた吉田善章助教授、小川雄一助教授に心から感謝致します。

吉田先生には本研究を進めるにあたり直接の御指導を頂き、研究全般に対する詳細な助言を頂きました。ご多忙中にも関わらず、幾度も質問に行ってはお手数をおかけしました。質問に行くたびに長時間かけて丁寧に説明して頂いたことは本研究を進めるうえで大きな励みになりました。先生の話しを聞いたたびに頭が整理され、一人になるとまた混乱という日々をくり返ししながら、何とか論文を書き上げることができました。先生がいらっやらない時には、先生のお書きになった本や論文が多くのことを教えてくれました。また大学院進学にあたり何度も相談にのって頂いたおかげで自分の気持ちを整理することができ、迷いなく決断することができました。奨学金のことまで相談にのって頂きました。改めて心から感謝致します。

小川先生には直接の御指導を頂く機会がなかったものの、いつも進み具合を気にかけて頂きました。発表練習の際、発表直前まで OHP の作り方で悩んでいる際に適切なアドバイスを頂きました。3 年前期のゼミでは大変お世話になりました。また帰りが遅くなった時、車で送って頂き有難うございました。学内で、食事に行った時、忘年会で、いつもなごやかに話しをして頂き大変楽しい時を過ごすことができました。

先生方には本研究以前の学部講義の時から浅学な私の質問に毎回丁寧に答えて頂きました。とても大きな励みになりました。

二瓶仁助手、森川淳二助手、比村治彦助手には研究者として人生の先輩とし

て多くの御指導と知識を教えて頂きました。特に比村さんには発表練習において多くのアドバイスを頂きました。

毎日の研究において、私の相談や疑問に答えてくださった研究室の皆さん、有難うございました。D3の鈴木さんには資料を頂きました。また発表用のOHPを夜遅くまで丁寧にみて頂きました。D2の近藤さんとは部屋に2人であることが多く、研究室のことなど色々と教えて頂いたり、話相手となってもらったりと、研究室での日々を楽しく過ごすことができました。D2の日渡さんはアメリカに留学されていてあまり会うことがなかったにも関わらず、計算機のことで大変お世話になりました。M2の伊藤さんと寺本さんは論文を書くにあたり励まして頂きました。総合試験場で実験をされていたM2の中島さん、角野さんとはあまり話す機会がなかったものの、IAEAの学会では実験のことを質問した際に丁寧に答えて頂きました。M1の柴山さん、田原さん、中嶋さんは会うたびに気楽に話しかけて頂きました。イクバルさん、ボルポーニさんはあまり英語のできない私に何度も話しかけてくれました。卒論生の大野君とは励ましあいながら研究を進めることができました。

卒論提出5日前に私の不注意であやうく卒論のファイルを全て消してしまいそうになりました。かろうじて最悪の事態はまぬがれたものの、多くのファイルをなくしてしまいました。その直後にeccが停電してしまい2日間使えなくなっていました。どうしてよいのか分からず、近藤研の羽島先生に相談したところ、即座にqspcを使えるように設定して頂きました。そのおかげで気が動転していた私も落ち着くことができ、その後の作業を続けることができました。本当に有難うございました。

お世話になった先生方、事務室の方々、友人、家族、その他多くの方々のおかげで無事に卒業論文を書くことができました。深く感謝の意を表します。